

Серия 50: алгебра. Только алгебра.

Пусть дана некоторая перестановка натуральных чисел $1, 2, \dots, n$. Пара (не обязательно стоящих рядом) чисел i и j этой перестановки образует *инверсию*, если $i < j$ и j стоит слева от i .

Перестановка любых двух из таких чисел называется *транспозицией*.

В естественной расстановке $1\ 2\ \dots\ n$ число инверсий равно нулю; в обратной $n\ n-1\ \dots\ 2\ 1$ — $\frac{n(n-1)}{2}$.

1. (Теорема об инверсиях). Докажите, что любая транспозиция меняет четность числа инверсий.
2. 25 детей стоят в ряд и ждут завтрака. Время от времени какой-нибудь ребенок перепрыгивает через своего соседа (перепрыгнуть сразу через двух обессилевший от голода кружковец не может). Могут ли они вернуться в исходное положение ровно за 105 прыжков?
3. Числа a_1, a_2, \dots, a_n положительны, $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 1/2$. Докажите, что $(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n) \geq 1/2$.
4. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.
5. Назовем натуральное число n хорошим, если набор чисел $1, 2, 3, \dots, 2n$ можно разбить на пары, сумма чисел в каждой из которых есть степень двойки. Найдите все хорошие числа.
6. Докажите, что $2023^2 + 2023^2 2024^2 + 2024^2$ — точный квадрат.
7. Дано n чисел. Сумма любых $k < n$ из них положительна. Докажите, что тогда сумма всех тоже положительна.