Вступительная олимпиада. 07.08.2006

1. За круглым столом сидят $2n$ человек: n физиков и n химиков, причем некоторые из них всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. Известно, что количество химиков-лжецов равно количеству физиков-лжецов. На вопрос: "Кто ваш сосед справа?" все сидящие за столом ответили: "Химик". Докажите, что n четно.

2. Рассмотрим все возможные наборы чисел из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, не содержащие двух соседних чисел. Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна $(n+1)! - 1$.

3. Можно ли квадрат разрезать на равнобедренные треугольники с углом при основании $75°$?

4. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Окружность, проходящая через точки O_1, B и O_2 пересекает вторую окружность также и в точке P. Докажите, что точки O_1, A и P лежат на одной прямой.

5. В языке племени Тру-ля-ля слово — любая последовательность из 10 нулей и единиц. Слова считаются синонимами, если одно можно получить из другого серией следующих операций: можно взять несколько подряд стоящих цифр с четной суммой и поставить на то же место в обратном порядке. Сколько в этом языке различных по смыслу слов?

Вступительная олимпиада. Вывод

6. Точка B лежит между точками A и C. Точки K и H лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC. Известно, что $AK = KB$, $BH = HC$, $\angle AKB = \alpha$ и $\angle BHC = \pi - \alpha$. Найдите углы треугольника KHM, где M — середина отрезка AC.

7. Натуральные числа x и y удовлетворяют равенству $x^2 - y^3 = 17$. Докажите, что число $y^2 + 2x + 2$ — составное.

8. Пусть a, b, c — неотрицательные числа, не более чем одно из которых равны нулю. Докажите неравенство

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Серия 1, общая

1. Пусть $P(x)$ – многочлен третьей степени с действительными коэффициентами такой, что $P(2) + P(5) < 7 < P(3) + P(4)$. Докажите, что существуют действительные числа a и b такие, что $a + b = 7$ и $P(a) + P(b) = 7$.

2. Найдите все строго возрастающие на всей числовой прямой функции f с действительными значениями, такие, что для всех действительных x и y $f(f(x) + y) = f(x + y) + f(0)$.

3. Дана функция $f(x) = \frac{5x-13}{3x-7}$. Найдите функцию $g(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{2006}$.

4. Пусть $r(n)$ обозначает количество представлений натурального числа n в виде суммы двух неупорядоченных квадратов натуральных чисел. Докажите, что ни при каком натуральном $m > 1$ последовательность остатков от деления чисел $r(n)$ на m не является периодической.

5. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что при всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\frac{f(x)+f(y)}{2} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x - y|$?

6. Решите в вещественных числах уравнение $3^x + 6^x = 4^x + 5^x$.

7. а) Существует ли непрерывная функция, график которой пересекается с любой прямой на плоскости?

б) $f(x)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция, определенная при всех действительных x. Может ли ее график иметь ровно одну или две общие точки с каждой прямой?

8. Даны различные натуральные числа m и n. Докажите, что существует такое вещественное число x, что дробные части чисел mx и nx лежат на промежутке $[1/3, 2/3]$.

Серия 2. Преимущественно комбинаторная

1. В белом квадрате 8×8 закрашено в черный цвет 16 клеток, ровно по две в каждом столбце и каждой строчке. Докажите, что перекрашиванием строк и столбцов нельзя уменьшить количество черных клеток.

2. На плоскости проведено 3000 прямых общего положения. Докажите, что они образуют не менее а) 1000; б) 2000 треугольников.

3. Дано неограниченное число квадратиков 1×1. Их стороны раскрашены в 4 цвета так, чтобы у каждого квадратика все стороны были разных цветов (количество квадратиков каждой возможной расцветки также неограничено). Эти квадратики можно склеивать по одноцветным сторонам. При каких m и n из них можно склеить прямоугольник $m \times n$ так, чтобы каждая его сторона была покрашена в один цвет и цвета всех сторон были различны?

4. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами обладает таким свойством: для любого натурального m найдется натуральное x такое, что $f(x)$ делится на m. Докажите, что корни $f(x)$ рациональны.

5. Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке M. Биссектриса угла AMB пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AKM и BKM, перпендикулярна биссектрисе угла AKB.

6. Вещественные числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \leqslant 8$.

7. Докажите, что в связном графе с четным числом ребер можно ориентировать ребра так, чтобы из каждой вершины выходило четное число ребер.

8. Пусть F – семейство конечных подмножеств множества натуральных чисел, такое, что любые два множества из этого семейства имеют непустое пересечение. Верно ли, что обязательно найдется такое конечное множество Y, чтобы для любых двух множеств A и B из семейства F пересечение трех множеств A, B и Y было бы непусто?

Серия 3. Пределы, цепные дроби etc.

1. Определим последовательность $\{x_n\}$ формулой $x_n = n(\sqrt[n]{a}-1)$ $(a>0, a\neq 1)$. Докажите, что последовательность а) $\{x_{2^k}\}$, б) $\{x_n\}$ убывает.

в) Докажите, что у последовательности $\{x_n\}$ существует предел $l(a)$.

г) Докажите, что $l(ab) = l(a) + l(b)$.

2. Докажите, что из любой ограниченной последовательности можно выбрать монотонную подпоследовательность.

3. Дана бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}$. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-\frac{a_n}{2}\right)=0$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. Дано действительное число $\alpha = 0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$. Построим такую последовательность: $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 0,a_2a_3\ldots a_n\ldots$, $\alpha_3 = 0,a_3a_4\ldots a_n\ldots$, $\ldots$, $\alpha_n = 0,a_na_{n+1}\ldots$, $\ldots$(каждое следующее число получаем из предыдущего вычеркиванием первой цифры после запятой). Известно, что последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится. Докажите, что число α рационально.

5. Конечная непрерывная, или цепная, дробь – это выражение вида

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}, \qquad (*)$$

в котором a_0 – целое, a_k натуральны при $k>0$.

а) Докажите, что любое рациональное число единственным образом раскладывается в конечную цепную дробь с $a_n \neq 1$.

Выражения $\frac{P_k}{Q_k} = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{k-1},\ a_k]$ (P_k и Q_k взаимно просты, $Q_k>0$) называются *подходящими дробями* к цепной дроби $(*)$.

б) Докажите, что $P_{k+1} = a_{k+1}P_k + P_{k-1}$, $Q_{k+1} = a_{k+1}Q_k + Q_{k-1}$.

в) Докажите, что $P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} = (-1)^n$.

г) Докажите, что $\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1]$, $\frac{P_n}{P_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, \ldots, a_0]$ (если $a_0 \neq 0$).

д) Докажите, что если $\alpha_k = [a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n]$ – *полное частное*, то $\alpha = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{\alpha_{k+1}P_k + P_{k-1}}{\alpha_{k+1}Q_k + Q_{k-1}}$.

6. Центры окружностей S_1, S_2 и S_3 лежат на одной прямой, причем S_1 и S_2 не пересекаются, а S_3 внешним образом касаются двух других окружностей. Докажите, что окружность S_3 пересекает общие внутренние касательные к S_1 и S_2 в четырех точках, образующих четырехугольник, две стороны которого параллельны общим внешним касательным к S_1 и S_2.

7. Числа от 1 до 100 разбиты на 7 непересекающихся множеств. Докажите, что в каком-то из этих множеств найдутся числа a_1, a_2, b_1, b_2 такие, что $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ ($a_i \neq b_j$, но, возможно, $a_1 = a_2$ или $b_1 = b_2$).

8. Пусть a, b, c – вещественные числа. Докажите неравенство $\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \geqslant 2$.

9. Бесконечный клетчастый лист покрыт (по клеточкам) в один слой доминошками 1×2. Докажите, что этот лист можно покрыть по клеточкам еще тремя слоями доминошек так, чтобы ни одна из доминошек не лежала в точности над другой.

Серия 4: экономим бумагу.

1. Функция $f \in C(\mathbb{R})$ имеет периоды 1 и 2π. Найдите функцию f, если известно, что $f(0) = 1$.

2. Пусть $P_1(x) = x^2 - 2$, $P_k(x) = P_1(P_{k-1}(x))$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Докажите, что для любого натурального n все корни уравнения $P_n(x) = x$ вещественны и различны.

3. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Для каждого вещественного x имеет место равенство $f(x)\cdot f(f(x)) = 1$. Известно, что $f(1000) = 999$. Найдите $f(500)$.

4. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию $f(1) = 2$ и тождеству $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$, $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Пусть $a, b, c \geqslant 0$. Докажите нераваенство $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geqslant 2(ab + bc + ca)$.

6. Докажите, что в любой компании, состоящей из четного числа людей, найдутся два человека, имеющие четное число общих знакомых.

Серия 5, положительно определенная.

1. Непрерывные функции $f, g : [0;1] \to [0;1]$ обладают тем свойством, что $f(g(x)) = g(f(x))$ для любого x из $[0;1]$. Докажите, что если f возрастает, то найдется $a \in [0;1]$ такое, что $f(a) = g(a) = a$.

2. Непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что для любого вещественного x выполняется равенство $f(x + f(x)) = f(x)$. Докажите, что функция f постоянна.

3. Функция F задана на всей вещественной оси, причем для любого x имеет место равенство: $F(x+1)F(x) + F(x+1) + 1 = 0$. Докажите, что функция F не может быть непрерывной.

4. а) Каких чисел больше среди натуральных чисел от 1 до 1000000: представимых в виде $2x^2 - 3y^2$ или представимых в виде $10xy - x^2 - y^2$ с целыми x и y?

б) Бинарная квадратичная форма $f(x, y) = [a, b, c] = ax^2 + bxy + cy^2$ с целыми коэффициентами **представляется** формой $F(X, Y) = [A, B, C] = AX^2 + BXY + CY^2$, если **линейное преобразование** τ: $x = \alpha X + \beta Y$, $y = \gamma X + \delta Y$ с целыми коэффициентами переводит f в F (то есть $F(X, Y) = f(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y)$). Как выражаются коэффициенты F через коэффициенты f (и коэффициенты линейного преобразования)? Как связаны дискриминанты f и F? (Напомним, что дискриминант формы f – это $D = b^2 - 4ac$.)

в) Пусть преобразование σ переводит форму f в форму g, а преобразование τ – форму g в форму h. Докажите, что f представляется формой h. Какое преобразование переводит f в h?

Если одна форма переводится в другую преобразованием определителя 1, то эти формы **эквивалентны**.

г) Докажите, что (техническая подробность) отношение эквивалентности – отношение эквивалентности, и что (для чего все это и нужно) эквивалентные формы представляют одни и те же числа (т.е. принимают одни и те же значения при целых значениях аргумента).

Начиная с этого момента, в настоящей задаче рассматриваются только **положительно определенные** (или просто **положительные**) формы, то есть формы, у которых $D < 0$, а $a > 0$.

д) Докажите, что если форма $f = [a, b, c]$ представляет число n при взаимно простых x и y, то она эквивалентна некоторой форме вида $[n, b_1, c_1]$.

Теперь мы рассмотрим **положительно определенные** (или просто **положительные**) формы, то есть формы, у которых $D < 0$, а $a > 0$.

Наша задача – выделить в каждом классе эквивалентности форм одну форму f и решать уравнение $f(x, y) = n$ только для нее.

Положительная форма $[a, b, c]$ – **приведенная**, если $-a < b \leqslant a$, $c \geqslant a$, а в случае,когда $c = a$, еще дополнительно $b \geqslant 0$.

е) Докажите, что всякая положительная форма эквивалентна некоторой приведенной.

5. Натуральное число n таково, что $n + 1$ – простое. Докажите, что а) $\sum\limits_{k=1}^{s} \frac{1}{nk+1} \notin \mathbb{N}$ ни для какого $s \in \mathbb{N}$; б) $\sum\limits_{k=t}^{s} \frac{1}{nk+1} \notin \mathbb{N}$ ни для каких $s, t \in \mathbb{N}$.

6. Две окружности с радиусами r и R ($r < R$) внешним образом касаются друг друга. Прямая касается этих окружностей в точках M и N. В точках A и B окружности касаются внешним образом третьей окружности. Прямые AB и MN пересекаются в точке C. Из точки C проведена касательная к третьей окружности, D — точка касания. Найдите длину отрезка CD.

7. Внутри треугольника ABC, все углы которого меньше $120°$, отмечена точка P такая, что $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA$. Докажите, что прямые Эйлера треугольников APB, BPC и CPA пересекаются в одной точке.

8. На складе есть $n > 1$ разных мешков и сторож. Каждый мешок лежит либо на полу, либо внутри одного из других мешков. Время от времени сторож выбирает один из лежащих на полу мешков, вынимает из него и кладет на пол все лежащие в нем мешки и, одновременно, кладет в него все мешки, которые раньше лежали на полу (содержимое остальных мешков при этом не меняется). Сколько различных расположений мешков может получить сторож? (Два расположения считаются одинаковыми, если любой мешок имеет в них одинаковое содержимое.)

Серия 6, без многосерийных задач.

1. Докажите, что корни уравнения $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ не могут быть все вещественны, если $2a^2 < 5b$.

2. Какое наибольшее количество вещественных корней может иметь многочлен $P(x) = x^n + ax^2 + bx + c$, где $n \geqslant 3$?

3. Вещественные числа $a_1, a_2, \ldots,, a_n$ положительны. Докажите, что уравнение $x^n + a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \ldots - a_n = 0$ имеет не более одного положительного корня.

4. а) Трехчлен $ax^2 + bx + c$ при всех целых x является точной четвертой степенью. Докажите, что он постоянен.

б) Трехчлен $ax^2 + bx + c$ при всех целых x является точным квадратом. Докажите, что тогда $ax^2 + bx + c = (dx + e)^2$, где $d, e \in \mathbb{Z}$.

5. Пусть $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что

а) **(Неравенство Юнга.)** Если $a, b \geqslant 0$, то $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

б) **(Неравенство Гельдера.)** Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \geqslant 0$, то $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leqslant (a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$.

в) **(Неравенство Минковского.)** Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \geqslant 0$ и $p > 1$, то $\big((a_1 + b_1)^p + \ldots + (a_n + b_n)^p\big)^{\frac{1}{p}} \leqslant (a_1^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + \ldots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}$.

6. Дан полный ориентированный граф на 2^n вершинах. Докажите, что из них можно выбрать $n + 1$ вершину $v_1, \ldots, v_{n+1}$ так, чтобы все ребра на этих вершинах были ориентированы от вершины с меньшим номером к вершине с большим номером.

7. Двое по очереди ставят крестики и нолики в клетки бесконечного листа. Первый хочет поставить четыре крестика так, чтобы центры их клеток были вершинами квадрата со сторонами, параллельными линиям сетки, а второй хочет ему помешать. Кто из них добьется своего при правильной игре?

8. На отрезке AB как на диаметре построена окружность. Внутри нее взята точка P. Постройте все точки M, лежащие на диаметре AB, такие, что $PM = MK$, где K — точка окружности и $MK \perp AB$.

Серия 7, разношёрстная

1. В связном графе $2n$ вершин, причем все они степени 3. Докажите, что можно выбрать а) $n+1$ ребер; б) n ребер так, чтобы правильная раскраска в 3 цвета выбранных ребер однозначно задавала правильную раскраску в 3 цвета всех ребер графа (раскраска правильная, если два ребра с общей вершиной имеют разные цвета).

2. Пусть $a, b, c \geqslant 0$. Докажите нераваенство

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ac + a^2) \geqslant (ab + bc + ca)^3.$$

3. Последовательность цифр строится следующим образом: $0, 1, 0, 1, 0, 1$, а каждый следующий член – последняя цифра суммы шести предыдущих. Встретится ли в этой последовательности комбинация цифр $1, 0, 1, 0, 1, 0$?

4. Клетки прямоугольника $239n \times 239(n + 1)$ были покрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Затем его каким-то образом разрезали на прямоугольники $n \times (n + 1)$, каждый из которых покрасили в цвет его левого нижнего угла. Какие значения может принимать разность количества черных и белых клеток после перекраски?

5. На плоскости даны окружность S, её центр O, точка A, лежащая на окружности S, и точка O_1, лежащая внутри S. Известно, что существует четырехугольник $ABCD$, вписанный в S и описанный вокруг некоторой окружности S_1 с центром O_1. При помощи одной линейки постройте еще одну вершину этого четырехугольника.

6. Каждая из окружностей S_1, S_2 и S_3 касается внешним образом окружности S (в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно) и двух сторон треугольника ABC (S_1 сторон AB и AC, S_2 сторон AB и BC, S_3 сторон AC и BC). Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

7. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0; 1]$, $f(0) = f(1)$. Докажите, что у графика этой функции есть параллельная оси абсцисс хорда длины а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{n}$ при каждом натуральном n. в) При каких d у этой функции заведомо найдется хорда длины d?

8. (Гаусс; доказательство Дж.Тэйта). Пусть p – простое число вида $8k + 1$. Рассмотрим произведение $N = \frac{p-1^2}{4} \cdot \frac{p-3^2}{4} \cdot \frac{p-5^2}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{p-m^2}{4}$, где m – наибольшее нечетное число, не превосходящее $\sqrt{p}$.

а) Докажите, что $N < (m + 1)!$.

б) Предположим, что p – квадратичный вычет по модулю каждого простого числа, меньшего $\sqrt{p}$. Докажите, что для каждой степени простого числа $q^s \leqslant m+1$ среди сомножителей, входящих в N, по крайней мере $[(m+1)/q^s]$ кратных q^s.

в) В предположении п.б) докажите, что N делится на $(m + 1)!$.

г) (Гаусс) Докажите, что если p – простое число вида $8k + 1$, то существует такое простое число $q < \sqrt{p}$, что p – квадратичный невычет $\mathrm{mod} q$.

д) Существенно ли в утверждении п.г) условие $p \equiv 1 \pmod 8$?

Серия 8, более комбинаторная.

1. Назовем *разбиением* представление натурального числа n в виде суммы одного или нескольких натуральных чисел, записанных в неубывающем порядке. Пусть $\Pi(n)$ — множество всех разбиений числа n. Обозначим для $\pi \in \Pi(n)$ через $A(\pi)$ количество единиц в разбиении π, а через $B(\pi)$ — количество различных чисел в π. Докажите, что $\sum_{\pi\in\Pi(n)} A(\pi) = \sum_{\pi\in\Pi(n)} B(\pi)$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

2. Двое по очереди ставят целые числа, не делящиеся на 3, в клетки таблицы 17×19, причем нельзя, чтобы в какой-нибудь строке или в каком-нибудь столбце сумма чисел давала остаток 1 при делении на 3. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто выиграет при правильной игре?

3. Пусть $a, b, c, d > 0$. Докажите неравнество $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2$.

4. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC выбрана точка P. Прямые AP и CP пересекают продолжения сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно, а прямая BP пересекает сторону AC в точке B_1. Прямые C_1B_1 и A_1B_1 пересекают стороны BC и AB в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения симедиан треугольника ABC.

5. Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем f(a)=f(b)=0. Докажите, что найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) + f'(c) = 0$.

6. Докажите, что многочлен $((x^2 - 1)^n)^{(n)}$ имеет n корней на отрезке $(-1, 1)$.

7. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами принимает в p подряд идущих целых точках значения, являющиеся полными квадратами (p – простое число, $p \geqslant 5$). Докажите, что $b^2 - 4ac$ делится на p.

Серия 9, комбинаторно-антинаучная

1. Три фокусника показывают фокус. Они дают зрителю колоду из $2n + 1$ карты (n достаточно большое число). Зритель берет себе одну карту, после чего делит оставшуюся колоду на две половины по n карт и дает их двум фокусникам. После этого фокусники не совещаясь, изучают свои карты и каждый из них дает третьему

фокуснику стопку из 6 упорядоченных карт. Третий фокусник должен определить, какую карту взял зритель. Как показать этот фокус?

2. 64 кубика сложили в виде квадрата 8×8. Можно ли их сложить в виде куба $4 \times 4 \times 4$ так, чтобы кубики, которые имели общую грань в первом случае, имели общую грань и во втором случае?

3. На узлах клетчатой сетке четыре кузнечика играют в чехарду (каждым ходом один из них симметрично отражается от какого-то из трех других). Первоначально они распложены в узлах $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Могут ли они через несколько ходов оказаться в узлах $(0,0)$, $(1,1)$, $(3,0)$, $(2,-1)$?

4. На доске написано натуральное число. Разрешается прибавлять к нему любой его натуральный делитель (в том числе единицу или само число) и результат записывать на доску вместо исходного числа. Какое наименьшее число таких операций достаточно для того, чтобы из любого первоначального числа можно было получить число, кратное 683?

5. Даны положительное отличное от 1 число x и число $a \in (0,1)$. Докажите неравенство $\frac{1-x^a}{1-x} < (1+x)^{a-1}$.

6. Даны вещественные числа $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$. Известно, что для любого k выполнено неравенство $a_k \geq \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$. Докажите, что среднее арифметическое чисел с нечетными номерами больше либо равна среднего ариметического чисел с четными номерами.

7. Касательные в точках A и B окружности S_1 пересекаются в точке O. Точки C и D — середины OA и OB соответственно. На отрезке CD выбраны точки X и Y. Прямые ZX и ZY касаются окружности S, причем точка Z лежит внутри угла AOB. Докажите, что если четырехугольник $OXZY$ — выпуклый, то он — описанный.

Серия 10, с продолжением арифметических сюжетов.

1. а) Цепная дробь $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n]$ – *симметрическая*, если $a_k = a_{n-k}$ при $0 \leqslant k \leqslant n$. Докажите, что при $n = 2k$ $P_n = P_{k-1}(P_k + P_{k-2})$, $Q_n = Q_k P_{k-1} + Q_{k-1}P_{k-2}$, а при $n = 2k+1$ $P_n = P_k^2 + P_{k-1}^2$, $Q_n = P_k Q_k + P_{k-1}Q_{k-1}$.

б) Пусть $p = 4n+1$ – простое число. Докажите, что среди чисел $\frac{p}{2}$, $\frac{p}{3}$, $\ldots$, $\frac{p}{2n}$ есть число, разлагающееся в симметрическую непрерывную дробь.

в) (Г.Дж.С.Смит, доказательство рождественской теоремы Ферма). Докажите, что (в условиях п.г)) p есть сумма двух квадратов.

2. Мы скажем, что действительное α раскладывается в **бесконечную цепную дробь**

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}},$$

если оно является пределом ее подходящих дробей.

а) Докажите, что при любых a_k этот предел существует.

б) Докажите, что любое иррациональное число единственным образом раскладывается в бесконечную цепную дробь.

в) Докажите, что периодическая цепная дробь (т.е. дробь, элементы a_k которой периодичны, начиная с некоторого места) является квадратичной иррациональностью.

3. Умножение всех элементов приведенной системы вычетов по простому модулю p на вычет $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ производит в ней перестановку.

а) Докажите, что если a – квадратичный вычет по модулю p, то получившаяся подстановка четна.

б) Докажите, что если a – квадратичный невычет по модулю p, то она нечетна.

4. (Битти, Банг) а) Докажите, что если последовательности $a_n = [n\alpha]$ и $b_n = [n\beta]$, $n \in \mathbb{N}$, не пересекаясь, покрывают весь натуральный ряд, то α и β иррациональны и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

б) Докажите, что если α и β иррациональны и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, то последовательности $a_n = [n\alpha]$ и $b_n = [n\beta]$, $n \in \mathbb{N}$, не пересекаясь, покрывают весь натуральный ряд.

5. Даны числа $n, k \in \mathbb{N}$, $n > k$. Докажите, что любое натуральное число, меньшее C_n^k, единственным образом представляется в виде $C_{a_1}^1 + C_{a_2}^2 + \ldots + C_{a_k}^k$, где $0 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_k < n$.

6. Существует ли $A \subset \mathbb{N}$ такое, что для $c \in \mathbb{N}$ существуют $x, y \in A$ такие, что $c = \frac{x+y}{2}$ тогда и только тогда, когда $c \notin A$?

7. Пусть $a, b, c, d > 0$. Докажите неравенство $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geqslant 0$.

8. а) Вещественные числа a, b, x, y удовлетворяют равенствам $(a+b)(x+y) = 1$ и $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = 1$. Докажите, что $ax+by \geqslant 0$. б) Вещественные числа a, b, c, x, y, z удовлетворяют равенствам $(a+b+c)(x+y+z) = 3$ и $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = 4$. Докажите, что $ax+by+cz \geqslant 0$.

9. В четырехугольнике $ABCD$ расположены две окружности радиусов R_1 и R_2, касающиеся внешним образом. Первая окружность касается сторон DA, AB и BC, причем стороны AB в точке E. Вторая окружность касается сторон BC, CD и DA, причем стороны CD в точке F. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O. Докажите, что $OE + OF \leqslant 2(R_1 + R_2)$.

Серия 11, экзотическая.

1. а) Докажите, что все бесконечные в обе стороны арифметические прогрессии являются базой некоторой топологии на $\mathbb{Z}$.

б) Пусть p – простое число. Докажите, что множество $A_p = \{\ldots, -2p, -p, 0, p, 2p, \ldots\}$ одновременно открыто и замкнуто.

в) Предположим, что множество простых чисел конечно. Докажите, что множество $\{-1, 1\}$ открыто.

г) Выведите отсюда, что множество простых чисел бесконечно.

2. Существует ли такое метрическое пространство и два таких шара в нем, что шар большего радиуса содержится в шаре меньшего радиуса и не совпадает с ним?

3. Множество всех натуральных чисел является объединением двух непересекающихся подмножеств $\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}$, $\{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\}$, где $f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < \ldots$, $g(1) < g(2) < \ldots < g(n) < \ldots$ и $g(n) = f(f(n)) + 1$ для всех $n \geqslant 1$. Определите $f(240)$.

4. Докажите, что для любого значения $n \in \mathbb{N}$ имеет место оценка $\{n\sqrt{2}\} > 1/(2n\sqrt{2})$, причем для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее неравенству $\{n\sqrt{2}\} < (1+\varepsilon)/(2n\sqrt{2})$.

5. Существует ли такое число h, что ни для какого натурального n число $[h \cdot 1969^n]$ не делится на $[h \cdot 1969^{n-1}]$?

6. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Докажите неравенство

а) $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1+a_2} + \ldots + \frac{n}{a_1+\ldots+a_n} < 4\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$;

б) $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1+a_2} + \ldots + \frac{n}{a_1+\ldots+a_n} < 2\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$.

7. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и A_1; точки M и M_1 — середины отрезков AC и A_1C_1 соответственно. Прямая BM пересекает описанную окружность треугольника A_1BC_1 в точке K_1, а прямая BM_1 — описанную окружность треугольника ABC в точке K. Сами описанные окружности пересекаются в точке P, а прямые A_1C_1 и AC — в точке T. Докажите, что точки M, M_1, K, K_1, P и T лежат на одной окружности.

8. Все грани выпуклого многогранника — треугольники, причем из каждой вершины выходит не менее 5 ребер и нет двух смежных вершин степени 5. Докажите, что у этого многогранника есть грань, из вершин которой выходит соответственно 5, 6 и 6 ребер.

9. Пусть $L(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ — это количество способов расставить в таблице $m \times n$ a_1 единиц, a_2 двоек, …, a_k чисел k так, чтобы числа в любом столбце сверху вниз строго возрастали, а в любой строке — слева направо нестрого возрастали. Докажите, что значение L не зависит от порядка аргументов.

Серия 12. Заполнение пробелов и эстетический взрыв.

1. Какому условию должны удовлетворять целочисленные векторы $\vec{u}(a, b)$ и $\vec{v}(c, d)$ для того, чтобы порожденная ими решетка $\Lambda = \{m\vec{u} + n\vec{v} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ включала все целочисленные векторы?

2. (Е.И.Золотарев) Пусть p и q – различные нечетные простые числа. Рассмотрим множества $S = \{0, 1, \ldots, pq-1\}$ и $T = \{(a, b) | 0 \leqslant a < p, 0 \leqslant b < q\}$. Согласно китайской теореме об остатках отображение $c \mapsto (c \bmod p, c \bmod q)$ задает взаимно-однозначное соответствие между S и T.

а) Найдите четность подстановки множества T, переводящей (a, b) в $(a+pb \bmod p, a+pb \bmod q)$, и подстановки, переводящей (a, b) в $(qa + b \bmod p, qa + b \bmod q)$.

б) Найдите четность подстановки множества S, переводящей $a + pb$ в $qa + b$.

в) Выведите из пунктов а) и б) квадратичный закон взаимности.

3. а) Существует ли такое множество $M \subset \mathbb{R}$, что все множества M, $\operatorname{cl} M$, $\operatorname{int} M$, $\operatorname{cl}\operatorname{int} M$ различны?

б) Существует ли такое множество $M \subset \mathbb{R}$, что все множества M, $\operatorname{cl} M$, $\operatorname{int} M$, $\operatorname{int}\operatorname{cl} M$ различны?

в) Существует ли такое множество $M \subset \mathbb{R}$, что все множества M, $\operatorname{cl} M$, $\operatorname{int} M$, $\operatorname{cl}\operatorname{int} M$, $\operatorname{int}\operatorname{cl} M$ различны?

г) Докажите, что $\operatorname{cl}\operatorname{int}\operatorname{cl}\operatorname{int} M = \operatorname{cl}\operatorname{int} M$.

д) Какое наибольшее количество множеств может быть получено из одного множества применением операций cl и int?

4. **Определение.** *Ряд Фарея* Φ_n – последовательность расположенных по возрастанию несократимых дробей $\frac{a}{b}$ с $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$.

Медианта дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ – дробь $\frac{a+c}{b+d}$.

а) Докажите, что ряд Φ_n получается из ряда Φ_{n-1} вставкой медиант между соседними дробями с суммой знаменателей n.

б) Докажите, что для двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, стоящих рядом в каком-нибудь ряду Фарея, $|ad - bc| = 1$.

5. В школе изучаются $2n$ предметов, а ученики получают только двойки и тройки. Никакие два ученика не учатся одинаково, и ни про каких двух учеников нельзя сказать, что один учится лучше другого. Докажите, что количество учеников не превосходит C_{2n}^{n}.

6. Из вершин правильного 35-угольника отметили а) 9; б) 8. Докажите, что какие-то четыре из отмеченных вершин образуют прямоугольник или трапецию.

7. В классе поровну мальчиков и девочек. Каждый мальчик дружит с четным числом девочек. Докажите, что можно выбрать несколько мальчиков так, чтобы каждая девочка дружила с четным числом выбранных мальчиков.

8. Дан треугольник ABC. В нем H – точка пересечения высот, I – центр вписанной окружности, O – центр описанной окружности, K – точка касания вписанной окружности со стороной BC. Известно, что $IO \parallel BC$. Докажите, что $AO \parallel HK$.

Серия 13, с выездом в город

1. (Дирихле) Пусть α – вещественное, а N – натуральное число. Докажите, что существуют такие целые числа p, q, $0 < q \leqslant N$, для которых $|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{Nq}$.

2. Пусть $n \geqslant 2$ – натуральное число. Докажите, что если числа k^2+k+n – простые для каждого целого k, $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{n/3}$, то числа k^2+k+n – простые для каждого целого k, $0 \leqslant k \leqslant n-2$.

3. Квадратичная форма $f(x,y)=[a,b,c]=ax^2+bxy+cy^2$ – *неопределенная*, если $D=b^2-4ac>0$. *Корни* такой формы – это числа $\Omega=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ и $\omega=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

Форма f – *приведенная*, если $|\Omega|>1$, $|\omega|<1$, $\Omega\omega<0$.

а) Как связаны между собой корни эквивалентных форм?

Преобразование (унимодулярное) $x=Y$, $y=-X+kY$ переводит форму $f=[a,b,a_1]$ в форму $g=[a_1,b_1,a_2]$, в которой $b_1=-b-2ka_1$ (а a_2 отыщется само). В этой ситуации форма g – *соседняя к f справа*, а f – *соседняя к g слева*.

б) Докажите, что любая форма $[a,b,c]$ дискриминанта D эквивалентна форме $[a,b,c]$, у которой $|a|\leqslant\sqrt{D/3}$.

в) Докажите, что любая форма эквивалентна приведенной.

г) Для каждой приведенной формы можно найти единственную приведенную форму, соседнюю к ней справа, и единственную приведенную форму, соседнюю к ней слева. Построим таким образом для данной приведенной формы соседнюю к ней справа, потом – следующую и т.д. Как вы думаете, чем все это кончится?

д) Докажите, что существет лишь конечное число приведенных форм данного определителя D.

4. а) Как известно, $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots$ (кстати, почему?) Докажите, что $e^x=\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

б) Докажите, что e^k иррационально при всех натуральных k.

5. Докажите, что если числа $m,n\in\mathbf{N}$ удовлетворяют неравенству $\sqrt{7}-m/n>0$, то $\sqrt{7}-m/n>1/mn$.

6. На полке в беспорядке расставлено 100-томное собрание сочинений Л.Н.Толстого. Разрешается помнять местами любые два тома разной четности. За какое наименьшее число таких операций гарантировано можно расставить тома по порядку?

7. Пусть M — произвольная точка внутри треугольника ABC. Прямая ℓ_a соединяет основания перпендикуляров из точки M на сторону BC и на высоту из точки A, аналогично определяются прямые ℓ_b и ℓ_c. Докажите, что эти три прямые конкурентны.

8. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC треугольника ABC пересекают прямые BC и AB в точках A_1 и C_1 соответственно. Биссектрисы углов A_1AC и C_1CA пересекаются в точке B'. Аналогично определяются точки A' и C'. Докажите, что точки A', B', C' лежат на одной прямой, проходящей через центр вписанной окружности треугольника.

9. Пусть $a,b,c>0$. Докажите неравенство

$$2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\geqslant(a+1)(b+1)(c+1)(abc+1).$$

Серия 14, без подпунктов

1. При каких $n\in\mathbb{N}$ можно рассставить по кругу числа $a_1,a_2,\ldots,a_n$, не все равные нулю так, чтобы для любого $k\leq n$ сумма k подряд стоящих чисел, начиная с a_k, равнялась нулю?

2. В гандбольном турнире в один круг (каждая команда сыграла с каждой ровно один раз, за победу дают 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0) приняло участие 16 команд. Все команды набрали разное количество очков, причем команда, занявшая седьмое место, набрала 21 очко. Докажите, что победитель хотя бы один раз сыграл вничью.

3. Докажите, что при $k>2$ число $2^{2^k-1}-2^k-1$ — составное.

4. В театральном фестивале участвовали 111 театральных трупп. Каждый день некоторые труппы выступали, а остальные были зрителями. При этом каждая труппа видела (будучи зрителями) выступления всех остальных трупп. Какое наименьшее число дней мог продолжаться фестиваль?

5. Две окружности касаются в точке P. Прямая касается одной из них в точке A и пересекает другую окружность в точках B и C. Докажите, что прямая PA делит пополам угол между PB и PC.

6. Пусть $a,b,c,d>0$. Докажите, что

$$\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{a+b}\leqslant\left(\frac{a}{c}\right)^a\left(\frac{b}{d}\right)^b.$$

7. Найдите наибольшее значение m^2+n^2 для всех пар натуральных $m,n\leq 2004$, удовлетворяющих условию $|m^2-mn-n^2|=1$.

Серия 15, с повышенной концентрацией арифметики

1. Докажите, что функция а) $f(x)=\cos x+\cos(\sqrt{2}x)$, б) $f(x)=\sin x+\sin(\sqrt{2}x)$, в) $f(x)=\sin x+\cos(\sqrt{2}x)$ – непериодическая.

2. Мудрое руководство наняло надсмотрщика для детей и положило ему зарплату $\sqrt{2}$ р. в день. Поскольку банкноты такого достоинства еще не выпускаются, мудрое руководство каждый день платит надсмотрщику 1 или 2 рубля так, что каждый день сумма, полученная надсмотрщиком за все время его работы отличается от положенной менее, чем на рубль. Докажите, что последовательность выплат непериодична.

3. (Лемма Туэ*). Пусть $n>1$ – натуральное число. Тогда для каждого натурального a, взаимно простого с n, существуют такие натуральные $x\leqslant\sqrt{n}$,, $y\leqslant\sqrt{n}$, что $ay\equiv\pm x\pmod n$.

4. Найдите все функции $f\colon (0,\infty)\to(0,\infty)$, удовлетворяющие условиям $f(x+1)=f(x)+1$ и $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{1}{x}$ при всех положительных x.

5. Докажите, что если уравнение $x^2-2y^2=n$, $n\in\mathbb{N}$, разрешимо в целых числах, то существует его решение, для которого $0<x\leqslant 2\sqrt{n}$.

6. (Вален) а) Докажите, что хотя бы одна из двух последовательных подходящих дробей к числу α удовлетворяет неравенству $\left|\frac{P_n}{Q_n}-\alpha\right|<\frac{1}{2Q_n^2}$.

б) Докажите, что если $\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|<\frac{1}{2q^2}$, то $\frac{p}{q}$ – подходящая дробь к α.

7. В треугольнике ABC провели биссектрису BK и высоту CD, а в треугольнике BKC – высоту KL. Прямые BK и CD пересекаются в точке M, а прямые KL и CD – в точке N. Описанная окружность треугольника BKN вторично пересекает прямую AB в точке P. Докажите, что треугольник KPM равнобедренный.

8. Окружности S_1, S_2 и S_3 пересекаются в точке A. Кроме того, первые две окружности пересекаются в точке B, первая и третья – в точке C, а вторая и третья – в точке D. Касательные к окружности S_2 в точке B и к окружности S_3 в точке C пересекаются на окружности S_1. Докажите, что касательные к окружности S_2 в точке D и к окружности S_1 в точке C пересекаются на окружности S_3.

9. Пусть $a,b,c,d>0$. Докажите, что

$$\frac{a-b}{a+2b+c}+\frac{b-c}{b+2c+d}+\frac{c-d}{c+2d+a}+\frac{d-a}{d+2a+b}\geqslant 0.$$

Матбой. Старшая иногородняя группа – Булиткин, Калинин, Христофоров 24 августа 2006 г.

1. $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+1$ – многочлен с целыми неотрицательными коэффициентами такой, что $a_k=a_{n-k}$ при $1\leqslant k\leqslant n-1$. Докажите, что существуют бесконечно много пар натуральных чисел x и y, для которых $P(x)$ делится на y и $P(y)$ делится на x.

2. Найдите все функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие при всех натуральных x, y и z неравенству $f(xy)+f(xz)\geqslant f(x)f(yz)+1$.

3. Какое наибольшее количество точек можно поместить в правильный шестиугольник со стороной 1 так, чтобы расстояние между любыми двумя было не меньше $\sqrt{2}$?

4. В центре каждой клетки бесконечной клетчатой плоскости стоит бак с целым неотрицательным числом литров бензина. Одного литра хватает на проезд в центр соседней клетки. Известно, что в любом квадрате 10×10 суммарно содержится не менее 100 л бензина. Докажите, что найдется клетка, из центра которой машина с пустым баком может доехать до центра любой другой клетки.

5. На ребрах тетраэдра произвольным образом выбрали по одной точке. Для каждой из вершин тетраэдра через нее и три выбранные точки, лежащие на выходящих из этой вершины ребрах, провели сферу. Докажите, что получившиеся четыре сферы пересекаются в одной точке.

6. На плоскости даны n прямоугольников с параллельными соответственными сторонами, причем никакие две стороны не лежат на одной прямой. Границы этих прямоугольников делят плоскость на области. Назовем область *важной*, если на ее границе лежит хотя бы одна из вершин прямоугольников. Докажите, что сумма количеств вершин всех важных областей меньше $40n$.

7. Положительные числа $a_0,a_1,\ldots,a_n$ удовлетворяют при $1\leqslant i\leqslant n-1$ условию $a_{i-1}a_{i+1}\leqslant a_i^2$. Докажите, что

$$\frac{a_0+\ldots+a_n}{n+1}\cdot\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\geqslant\frac{a_0+\ldots+a_{n-1}}{n}\cdot\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}.$$

8. В треугольнике центр описанной окружности и ортоцентр лежат на вписанной окружности. Докажите, что один из углов треугольника равен 60°.

9. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n=0,1,2,\ldots$ обладают следующим свойством: $a_0=0$, $b_0=1$ и при любых k и l числа $a_{k+l}-a_kb_l-a_lb_k$ и $b_{k+l}-b_kb_l+a_ka_l$ делятся на 239. Докажите, что a_{240} делится на 239.

10. В стране 2000 городов, из каждого из которых ведут ровно три дороги в другие города. Докажите, что можно закрыть 1000 дорог так, чтобы в стране не осталось ни одного замкнутого маршрута, состоящего из нечетного числа дорог.

Матбой внутри старшей группы 1–2, 24 августа 2006 г.

1. Дан многочлен $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$ с целыми коэффициентами. Докажите, что существует многочлен $Q(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(x)Q(x)$ имеет ровно два нечетных коэффициента.

2. Найдите все функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие при всех натуральных x, y и z неравенству $f(xy)+f(xz)\geqslant f(x)f(yz)+1$.

3. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ – выпуклый многоугольник, $n\geqslant 4$. Докажите, что $A_1A_2\ldots A_n$ – вписанный тогда и только тогда, когда каждой вершине A_j можно сопоставить пару (b_j,c_j) действительных чисел так, что $A_iA_j=|b_jc_i-b_ic_j|$ для всех i, j, $1\leqslant i<j\leqslant n$.

4. На клетчатой доске 5×5 два игрока по очереди ставят числа в пустые клетки: первый – единицы, второй – нули. Каждым ходом ставится одно число, пока не будет заполнена вся доска. После этого для каждого квадрата 3×3 подсчитывается сумма чисел в его клетках. Обозначим через наибольшую из этих сумм. Первый игрок стремится к тому, чтобы стало как можно больше. Какое наибольшее значение он может гарантировать?

5. Плоскость α касается сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, в точке A. Докажите, что линии пересечения плоскостей граней ABC, ACD и ABD с плоскостью α делят ее на шесть равных углов тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

6. Можно ли раскрасить множество натуральных чисел в 6 цветов так, чтобы сумма любых пяти чисел разных цветов была числом шестого цвета?

7. Положительные числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяют при $1 \leqslant i \leqslant n-1$ условию $a_{i-1}a_{i+1} \leqslant a_i^2$. Докажите, что

$$\frac{a_0 + \ldots + a_n}{n+1} \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \geqslant \frac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n} \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

8. В треугольнике центр описанной окружности и ортоцентр лежат на вписанной окружности. Докажите, что один из углов треугольника равен 60°.

9. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ обладают следующим свойством: $a_0 = 0, b_0 = 1$ и при любых k и l числа $a_{k+l} - a_k b_l - a_l b_k$ и $b_{k+l} - b_k b_l + a_k a_l$ делятся на 239. Докажите, что a_{240} делится на 239.

10. В стране 2000 городов, из каждого из которых ведут ровно три дороги в другие города. Докажите, что можно закрыть 1000 дорог так, чтобы в стране не осталось ни одного замкнутого маршрута, состоящего из нечетного числа дорог.