Вступительная олимпиада. 07.08.2006

1. За круглым столом сидят $2n$ человек: n физиков и n химиков, причем некоторые из них всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. Известно, что количество химиков-лжецов равно количеству физиков-лжецов. На вопрос: "Кто ваш сосед справа?" все сидящие за столом ответили: "Химик". Докажите, что n четно.

2. Рассмотрим все возможные наборы чисел из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, не содержащие двух соседних чисел. Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна $(n+1)! - 1$.

3. Можно ли квадрат разрезать на равнобедренные треугольники с углом при основании $75°$?

4. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Окружность, проходящая через точки O_1, B и O_2 пересекает вторую окружность также и в точке P. Докажите, что точки O_1, A и P лежат на одной прямой.

5. В языке племени Тру-ля-ля слово — любая последовательность из 10 нулей и единиц. Слова считаются синонимами, если одно можно получить из другого серией следующих операций: можно взять несколько подряд стоящих цифр с четной суммой и поставить на то же место в обратном порядке. Сколько в этом языке различных по смыслу слов?

Вступительная олимпиада. Вывод

6. Точка B лежит между точками A и C. Точки K и H лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC. Известно, что $AK = KB$, $BH = HC$, $\angle AKB = \alpha$ и $\angle BHC = \pi - \alpha$. Найдите углы треугольника KHM, где M — середина отрезка AC.

7. Натуральные числа x и y удовлетворяют равенству $x^2 - y^3 = 17$. Докажите, что число $y^2 + 2x + 2$ — составное.

8. Пусть a, b, c — неотрицательные числа, не более чем одно из которых равны нулю. Докажите неравенство

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Серия 1, общая

1. Пусть $P(x)$ – многочлен третьей степени с действительными коэффициентами такой, что $P(2) + P(5) < 7 < P(3) + P(4)$. Докажите, что существуют действительные числа a и b такие, что $a + b = 7$ и $P(a) + P(b) = 7$.

2. Найдите все строго возрастающие на всей числовой прямой функции f с действительными значениями, такие, что для всех действительных x и y $f(f(x) + y) = f(x + y) + f(0)$.

3. Дана функция $f(x) = \frac{5x-13}{3x-7}$. Найдите функцию $g(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{2006}$.

4. Пусть $r(n)$ обозначает количество представлений натурального числа n в виде суммы двух неупорядоченных квадратов натуральных чисел. Докажите, что ни при каком натуральном $m > 1$ последовательность остатков от деления чисел $r(n)$ на m не является периодической.

5. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что при всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\frac{f(x)+f(y)}{2} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x - y|$?

6. Решите в вещественных числах уравнение $3^x + 6^x = 4^x + 5^x$.

7. а) Существует ли непрерывная функция, график которой пересекается с любой прямой на плоскости?

б) $f(x)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция, определенная при всех действительных x. Может ли ее график иметь ровно одну или две общие точки с каждой прямой?

8. Даны различные натуральные числа m и n. Докажите, что существует такое вещественное число x, что дробные части чисел mx и nx лежат на промежутке $[1/3, 2/3]$.

Серия 2. Преимущественно комбинаторная

1. В белом квадрате 8×8 закрашено в черный цвет 16 клеток, ровно по две в каждом столбце и каждой строчке. Докажите, что перекрашиванием строк и столбцов нельзя уменьшить количество черных клеток.

2. На плоскости проведено 3000 прямых общего положения. Докажите, что они образуют не менее а) 1000; б) 2000 треугольников.

3. Дано неограниченное число квадратиков 1×1. Их стороны раскрашены в 4 цвета так, чтобы у каждого квадратика все стороны были разных цветов (количество квадратиков каждой возможной расцветки также неограничено). Эти квадратики можно склеивать по одноцветным сторонам. При каких m и n из них можно склеить прямоугольник $m \times n$ так, чтобы каждая его сторона была покрашена в один цвет и цвета всех сторон были различны?

4. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами обладает таким свойством: для любого натурального m найдется натуральное x такое, что $f(x)$ делится на m. Докажите, что корни $f(x)$ рациональны.

5. Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке M. Биссектриса угла AMB пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AKM и BKM, перпендикулярна биссектрисе угла AKB.

6. Вещественные числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \leqslant 8$.

7. Докажите, что в связном графе с четным числом ребер можно ориентировать ребра так, чтобы из каждой вершины выходило четное число ребер.

8. Пусть F – семейство конечных подмножеств множества натуральных чисел, такое, что любые два множества из этого семейства имеют непустое пересечение. Верно ли, что обязательно найдется такое конечное множество Y, чтобы для любых двух множеств A и B из семейства F пересечение трех множеств A, B и Y было бы непусто?

Серия 3. Контрольные вопросы.

Назовем отрезок $[a, b]$ на числовой оси *ловушкой* для некоторой последовательности, если почти вся последовательность лежит в этом отрезке. Назовем отрезок $[a, b]$ на числовой оси *кормушкой* для некоторой последовательности, если на этом отрезке лежит бесконечно много членов этой последовательности.

1. a) Докажите, что всякая ловушка является кормушкой. Приведите пример последовательности и ее кормушки, которая не является ловушкой.

b) Существует ли последовательность, не имеющая ни одной кормушки?

c) Существует ли последовательность, для которой всякий отрезок является кормушкой?

2. На плоскости находится 100 точек. Докажите, что есть прямая, по обе стороны от которой лежит по 50 из данных точек.

3. Докажите, что если n и k – натуральные числа, причем $n > k$, то для любого $a > 0$ выполняется неравенство $na^k - ka^n \leqslant n - k$.

4. Докажите, что при любых положительных x, y, z выполняется неравенство:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geqslant \frac{9}{3+x+y+z}.$$

5. Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке. Описанная около $A_1B_1C_1$ окружность вторично пересекает стороны треугольника в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что AA_2, BB_2, CC_2 тоже пересекаются в одной точке.

6. Решить уравнение в целых числах: $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$.

7. Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2006}$.

8. Многочлен $P(x)$ при делении на двучлен $x + 3$ дает остаток 1, а при делении на многочлен $x^2 - 1$ – остаток $2x + 1$. Найдите остаток от деления $P(x)$ на произведение $(x + 3)\left(x^2 - 1\right)$.

Серия 4. Продолжение.

1. a) Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, причем $y_n \neq 0$ для любого n. Верно ли, что последовательность $\{x_n/y_n\}$ сходится?

b) Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к нулю. Может ли предел последовательности $\{x_n/y_n\}$ равняться 1) 0; 2) 1? Может ли эта последовательность расходиться?

2. На прямой l отмечены две точки – A и B. Кроме того, дано некоторое фиксированное число c.

а) Докажите, что на прямой AB существует ровно одна такая точка X, что $AX^2 - BX^2 = c$.

б) Докажите, что геометрическое место точек Y на плоскости, для которых $AY^2 - BY^2 = c$ – это прямая, перпендикулярная прямой l.

3. Даны две неконцентрические окружности. Найдите ГМТ на плоскости, степени которых относительно этих окружностей одинаковы. (Это ГМТ называется *радикальной осью* двух данных окружностей.)

4. В ряд выложено 100 красных и 100 синих шаров, причем самый левый и самый правый шары – синие. Докажите, что между шарами можно поставить перегородку так, чтобы в каждой части оказалось одинаковое количество синих и красных шаров.

5. Для положительных чисел a,b,c докажите неравенство

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

6. Для произвольного натурального n докажите неравенство $n^n \geq (n+1)^{n-1}$.

7. (Неравенство Бернулли) Пусть $\alpha \geqslant -1$. Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$.

8. Пусть $\{a_n\}$ – последовательность чисел, определенная равенствами $a_1 = 1, a_n = na_{n-1} + (-1)^n$. Докажите, что a_n делится на $n - 1$ при $n > 1$.

Серия 5. Применим полученные знания.

1. Докажите, что следующие последовательности сходятся и найдите их пределы:

a) $x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+9}{2n-1}$;

b) $x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$;

c) $x_1 = \sqrt{2}, x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$;

d) $x_n = \frac{n^k}{a^n} \quad (|a| > 1)$.

2. На сторонах BC и AC остроугольного треугольника ABC выбраны точки A_1 и B_1 соответственно. На отрезках AA_1 и BB_1, как на диаметрах, построены окружности. Докажите, что общая хорда этих окружностей проходит через ортоцентр треугольника ABC.

3. Даны три попарно неконцентрические окружности. Для каждых двух из них рисуется их радикальная ось. Докажите, что эти три оси пересекаются в одной точке (она называется *радикальным центром* трех окружностей).

4. Грани восьми единичных кубиков окрашены в черный и белый цвета так, что у каждого кубика черных и белых граней поровну. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб $2 \times 2 \times 2$, на поверхности которого черных и белых квадратиков поровну.

5. Найдите все пары натуральных чисел (a, b), для которых число $4a^2b^4 - 4a + b^2$ – квадрат целого числа.

6. Для положительных b_i и произвольных a_i $(i = \overline{1, n})$ справедливо неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n},$$

причем равенство достигается т. и т. т., когда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

7. Докажите, что для положительных чисел a,b,c и d выполнено неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+d} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2.$$

8. В стране несколько городов и один из них является столицей. Из столицы выходит 100 дорог, а из всех остальных городов – по 10. При этом из любого города можно доехать до любого другого. Докажите, что можно закрыть на ремонт половину дорог, идущих из столицы так, чтобы это условие сохранилось.

Серия 6. Транс-неравенство и радикализм.

1. Существует ли последовательность, множество предельных точек которой a) множество натуральных чисел; b) отрезок $[0; 1]$; c) множество рациональных чисел?

2. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, а M — произвольная точка на плоскости. Докажите, что описанные окружности треугольников AA_1M, BB_1M и CC_1M либо касаются в точке M, либо имеют еще одну общую точку.

3. Окружность делит каждую сторону треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.

4. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1, пересекающиеся в точке H. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AB и CH, перпендикулярна прямой A_1B_1.

5. (Транс-неравенство) a) Для $x_1 \geqslant x_2$ и $y_1 \geqslant y_2$ докажите неравенство $x_1y_1 + x_2y_2 \geqslant x_1y_2 + x_2y_1$.

b) Для $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ докажите неравенство

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \geqslant x_1y_{k_1} + x_2y_{k_2} + \ldots + x_ny_{k_n} \geqslant x_1y_n + x_2y_{n-1} + \ldots + x_ny_1.$$

6. Докажите, что при произвольных a, b, c справедливо неравенство $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^3b + b^3c + c^3a$.

7. Докажите, что при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ справедливо неравенство

$$a + b + c \leqslant \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{a^2+c^2}{2b} + \frac{b^2+c^2}{2a} \leqslant \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab}.$$

8. Есть n человек, некоторые из которых знакомы между собой. Каждый вечер кто-то из них приглашает к себе всех своих знакомых и знакомит их между собой. Известно, что после того, как каждый хотя бы один раз собрал у себя гостей, двое людей так и не познакомились. Докажите, что и на следующий вечер эти двое не познакомятся.

Серия 7. Неравенства и геометрия.

1. Докажите, что при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{d} + \frac{d^3}{a} \geqslant \frac{1}{2}\left((a+1)^2 + (b+1)^2 + (c+1)^2 + (d+1)^2\right) - 4.$$

2. (Неравенство Чебышева) Для $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ докажите неравенство

$$n\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\right) \geqslant \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right).$$

3. Докажите, что уравнение $2\cos x = x^2 + 4x - 6$ имеет по крайней мере один действительный корень.

4. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0; 1]$. Докажите, что у графика этой функции есть параллельная оси абсцисс хорда длины а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{n}$ при каждом натуральном n.

5. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису $\angle BHC_1$, проходит через центр описанной окружности $\triangle ABC$.

6. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ построен остроугольный треугольник ABE. Перпендикуляры из D на BE и из C на AE пересекаются в точке P. Докажите, что прямая EP перпендикулярна прямой AB.

7. Дана окружность и две точки вне ее. Постройте параллелограмм, две соседние вершины которого расположены в данных точках, а две другие – на данной окружности.

8. Докажите, что число а) $91!1901! - 1$, б) $92!1900! + 1$ делится на 1993.

Серия 8. Всего с одним неравенством.

1. Докажите, что уравнение $x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - a = 0$ при любом значении параметра a имеет не больше одного корня.

2. Докажите неравенство $\cos\frac{1}{4} - \cos\frac{1}{3} < \frac{1}{36}$.

3. Докажите, что любое непрерывное отображение из отрезка $[a, b]$ в себя имеет неподвижную точку.

4. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами принимает значение 1 в трех различных целых точках. Докажите, что $P(x)$ не может иметь целых корней.

5. Найдите все пары натуральных чисел m и n такие, что $m^2 + n$ и $n^2 + m$ — точные квадраты.

6. На занятии в Математическом Центре графства Липшир каждый кружковец решил две задачи, а каждую задачу решило два кружковца. Докажите, что можно организовать разбор, на котором каждый разберет одну из решенных им задач и все задачи будут разобраны.

7. В графстве имеется 1000 коттеджей, в каждом из которых живет по одному джентльмену. В один прекрасный день каждый джентльмен переезжает из своего дома в какой-либо другой (переезд осуществляется так, что после него в каждом доме живет один джентльмен). Доказать, что после переезда можно так покрасить все 1000 коттеджей синей, зеленой и красной красками, чтобы у каждого хозяина цвет его нового дома отличался от цвета старого дома.

8. Эксцентричный джентльмен мистер Доджсон построил в саду модель графства Липшир под названием "Зазеркалье". Если две усадьбы в графстве соединены дорогой, то в Зазеркалье – нет, и наоборот. Из усадьбы A нельзя проехать в усадьбу B, заехав по дороге менее, чем к двум джентльменам. Докажите, что в Зазеркалье можно проехать из любой усадьбы в любую, заехав по дороге не более, чем в две чужих усадьбы.

Серия 9. Линейность и метод Штурма.

1. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. Продолжения его боковых сторон пересекаются в точках E и F. Пусть M, N, K –точки пересечения биссектрис углов A и C, B и D, E и F соответственно. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

2. Докажите *теорему Ньютона:* прямая, соединяющая середины диагоналей четырехугольника, описанного около круга, проходит через центр этого круга.

3. Докажите, что если $a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, то многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ имеет по крайней мере один вещественный корень.

4. Сумма двух неотрицательных вещественных чисел a и b равна 1. Докажите, что a) $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}$; b) $a^3+b^3 \geqslant \frac{1}{4}$. Найдите c) наименьшее значение выражения $a^4 + b^4$; d) наибольшее значение выражение $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

5. Набор положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяет условию $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Докажите неравенства

a)

$$\frac{(1-x_1)\ldots(1-x_n)}{x_1\ldots x_n} \geqslant (n-1)^n.$$

b)

$$\frac{(1+x_1)\ldots(1+x_n)}{(1-x_1)\ldots(1-x_n)} \geqslant \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n, \quad n \geqslant 2.$$

6. Докажите, что для любого набора неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство $\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_1a_3} + \ldots + \sqrt{a_{n-1}a_n} \leqslant \frac{n-1}{2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

7. На симпозиуме каждый делегат знаком хотя бы с одним из остальных участников и не знаком со всеми. Докажите, что всех делегатов можно разбить на две группы так, чтобы каждый участник симпозиума был знаком хотя бы с одним человеком из своей группы.

8. Все простые делители 2006 натуральных чисел не превосходят 30. Докажите, что среди них есть два, дающих в произведении точный квадрат.

Серия 10. Снова Штурм.

1. Даны положительные числа x, y такие, что $x + y = 1$. Докажите, что $\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+x} \geqslant \frac{4}{3}$.

2. Для вещественных чисел $x_1, \ldots, x_n \quad (n \geq 2)$ из промежутка $(0; 1]$ докажите неравенство

$$\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \leqslant \frac{n}{1+\sqrt{[n]}x_1x_2\ldots x_n}.$$

3. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ существуют три неколлинеарные внутренних точки P_1, P_2, P_3 такие, что $S_{\triangle ABP_i} + S_{\triangle CDP_i} = S_{\triangle BCP_i} + S_{\triangle ADP_i}$, для $i = 1, 2, 3$. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

5. В вершинах треугольника ABC расставьте массы так, чтобы его центр масс совпадал с центром вписанной окружности.

6. В треугольнике ABC $\angle BAC = 60°$. K — точка пересечения медианы CM и высоты BN. Известно, что $CK = 6$, $KM = 1$. Найдите углы треугольника.

7. Король Людовик не доверяет некоторым своим придворным. Он составил полный список придворных и приказал каждому из них следить за одним из остальных. При этом первый придворный следит за тем, кто следит за вторым, второй следит за тем, кто следит за третьим и т.д., предпоследний следит за тем, кто следит за последним, последний следит за тем, кто следит за первым. Докажите, что у Людовика нечетное число придворных.

8. Задано несколько точек, соединенных отрезками двух цветов: некоторые пары точек – голубыми отрезками, некоторые другие – красными. Известно, что в любом замкнутом пути, состоящем из нескольких отрезков, число

красных отрезков четно. Докажите, что все точки можно разбить на два множества так, что каждый красный отрезок соединяет точки из разных множеств, а каждый голубой – точки из одного и того же множества.

Серия 11, с гомотетией.

1. Пусть числа x, y и z больше единицы. Докажите неравенство $xy + yz + xz < 2xyz + 1$.

2. Докажите, что если $a_i \geqslant 0$, $b_i \geqslant 0$, $c_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то справедливо неравенство

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \ldots + a_nb_nc_n)^3 \leqslant \left(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3\right)\left(b_1^3 + b_2^3 + \ldots + b_n^3\right)\left(c_1^3 + c_2^3 + \ldots + c_n^3\right).$$

3. Четырехугольник $ABCD$ – вписанный, причем его диагонали перпендикулярны и пересекаются в точке O. Докажите, что

а) перпендикуляр из точки O на сторону AD делит BC пополам;

б) основания пепендикуляров из точки O на стороны четырехугольника и середины этих сторон лежат на одной окружности.

4. Две окружности касаются в точке K. Прямая, проходящая через K, пересекает эти две окружности в точках A и B. Докажите, что касательные к окружностям в точках A и B параллельны.

5. В сегмент круга ω, ограниченный его хордой MN, вписано окружность. Эта окружность касается окружности ω в точке A, а хорды MN – в точке B. Прямая AB перескает дугу MN в точке K. Докажите, что K – середина дуги MN и $KA \cdot KB = KN^2$.

6. Пусть p – простое число. Докажите, что числитель несократимой дроби $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$ делится на p.

Серия 12, выданная, несмотря ни на что.

1. Для положительных a, b, c докажите неравенство $8(a^3 + b^3 + c^3)^2 \geqslant 9(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab)$.

2. Пусть a, b, c – стороны треугольника. Докажите, что $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3$.

3. Для положительных a, b, c, удовлетворяющих условию $abc = 1$, докажите неравенство $\frac{a}{1+ac} + \frac{b}{1+ab} + \frac{c}{1+bc} \geqslant \frac{3}{2}$.

4. В сегмент круга ω, ограниченный его хордой MN, вписано две окружности. Эти окружности касаются окружности ω в точках A и B, а хорды MN – в точках C и D. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка O – точка пересечения диагоналей, точка M – середина стороны AB. Известно, что $BO = OD$. Прямые CM и BD пересекаются в точке P, прямые AP и BC – в точке N, прямые NO и AD – в точке Q. Докажите, что Q – середина AD.

6. a, b, c, d – натуральные числа, $ab = cd$.

а) Докажите, что существуют натуральные числа u_1, v_1, u_2, v_2, для которых $a = u_1v_1$, $b = u_2v_2$, $c = u_1u_2$, $d = v_1v_2$.

б) Докажите, что число $a + b + c + d$ – составное.

7. Докажите, что $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$.

8. В математический лагерь приехало несколько школьников, каждый из которых имеет среди приехавших от 2 до 30 знакомых. Докажите, что опытный вожатый сможет расселить их в 60 комнат так, чтобы никакие два знакомых не оказались в одной комнате, и чтобы не было школьника, все знакомые которого живут в одной комнате.

Серия 13...дюжина...эта..., ну, вы поняли.

1. Докажите, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то справедливо неравенство $(a+b)^2\left(a^2+b^2\right)^2\ldots(a^n+b^n)^2 \geqslant \left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)^n$.

2. Для чисел x, y, по модулю не превосходящих 1, докажите неравенство $|xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}| \leqslant 1$.

3. Докажите неравенство $\left|\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \leqslant 1$.

4. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках X и Y, а вневписанная окружность касается продолжений этих сторон в точках Z и T. Докажите, что середина стороны BC равноудалена от прямых XY и ZT.

5. Точка A – одна из точек пересечения двух окружностей с центрами O_1 и O_2. Общие внешние касательные касаются первой окружности в точках B_1 и B_2, а второй окружности в точках C_1 и C_2. M_1 и M_2 – середины отрезков B_1B_2 и C_1C_2. Докажите, что $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$.

6. Решите в целых числах уравнение: $x^3 + 7 = y^2$.

7. Докажите, что из $n+1$ числа, меньшего $2n$, всегда можно выбрать три числа, из которых одно равно сумме двух других.

Серия 14. Символ Якоби.

1. **Определение.** Пусть P – нечетное натуральное число, большее единицы, $P = p_1p_2\ldots p_k$ – его разложение на простые множители (среди них могут быть и равные). Далее, пусть $(a, P) = 1$. Тогда *символ Якоби* $\left(\frac{a}{P}\right)$ определяется равенством $\left(\frac{a}{P}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)\ldots\left(\frac{a}{p_k}\right)$.

а) Докажите, что символ Якоби $\left(\frac{a}{b}\right)$ мультипликативен по a.

б) Докажите, что при нечетном b $\left(\frac{-1}{b}\right)=(-1)^{\frac{b-1}{2}}$. Таким образом, $\left(\frac{-1}{b}\right)$ равен 1, если $b=4k+1$ и равен -1, если $b=4k+3$.

в) Докажите, что при нечетном b $\left(\frac{2}{b}\right)=(-1)^{\frac{b^2-1}{8}}$. Таким образом, $\left(\frac{2}{b}\right)$ равен 1, если $b=8k\pm1$ и равен -1, если $b=8k\pm3$.

г) Докажите, что при нечетных взаимно простых a и b $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)=(-1)^{\frac{a-1}{2}\cdot\frac{b-1}{2}}$.

Таким образом, если хоть одно из чисел a и b имеет вид $4k+1$, то $\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{b}{a}\right)$, а в противном случае $\left(\frac{a}{b}\right)=-\left(\frac{b}{a}\right)$.

д) Является ли 74 квадратичным вычетом по модулю 101 ? А 365 по модулю 1847 ?

2. Докажите, что если $p=4n-1$ простое и $(2k-1,p)=1$, то $(n+k(k-1))^{2n-1}\equiv 1 \pmod p$.

3. Для чисел x,y, по модулю не превосходящих 1, докажите неравенство $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\leqslant 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$.

4. Докажите, что для треугольника

a) $1/a+1/b+1/c\geqslant 9r/(2S)$.

b) $ab+ac+bc\geqslant 4\sqrt{3}S$.

5. На фестиваль военно-морской песни приглашены хоры из 100 стран. Каждый хор должен исполнить три песни и сразу уехать домой. Ознакомившись с текстами песен, организаторы обнаружили, что каждая песня оскорбительна для одной из участвующих стран. Докажите, что они могут назначить порядок выступлений таким образом, чтобы никому не пришлось выслушивать больше трех оскорбительных для его страны песен.

Серия 15. Укороченная.

1. Найти все пары (p,q) простых чисел, для которых число 2^p-1 делится на q, и среди простых делителей числа $q-1$ имеются только числа 2, 3, 5 и 7.

2. Найдите все такие простые числа p и q, что 2^p+1 делится на q, а 2^q+1 делится на p.

3. Доказать, что любое простое число p является делителем хотя бы одного члена последовательности $a_n=n^6-n^4-24n^2-36$.

Серия 16, разношерстная

1. Найдите все нечетные числа n, такие, что 3^n+1 делится на n.

2. Докажите, что при любых натуральных $a>1$ и n $\varphi(a^n-1)$ делится на n.

3. а) Докажите, что при $0\le a<1$ справедливо неравенство $\sqrt{\frac{a}{1-a}}\geqslant 2a$, причем равенство достигается только при $a=\frac{1}{2}$.

б) Докажите, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

4. Докажите неравенство $\frac{|a-b|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}\leqslant\frac{|a-c|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+c^2}}+\frac{|b-c|}{\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+c^2}}$.

5. (Теорема Ван-Обеля). Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке K. Докажите, что $\frac{AK}{KA_1}=\frac{AB_1}{B_1C}+\frac{AC_1}{C_1B}$, а) рассмотрением площадей, б) с помощью масс.

6. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 – середины сторон шестиугольника (в порядке обхода). Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ совпадают.

Пусть дана некоторая перестановка натуральных чисел 1, 2, ..., n. Пара (не обязательно стоящих рядом) чисел i и j этой перестановки образует *инверсию*, если $i<j$ и j стоит слева от i.

Перестановка любых двух из таких чисел называется *транспозицией.*

В естественной расстановке $1\ 2\ \ldots n$ число инверсий равно нулю; в обратной $n\ n-1\ \ldots 2\ 1$ – $\frac{n(n-1)}{2}$.

7. (Теорема об инверсиях). Докажите, что любая транспозиция меняет четность числа инверсий.

8. На плоскости задано бесконечно много прямоугольников, вершины которых располагаются в точках с координатами $(0,0)$, $(0,m)$, $(n,0)$, (n,m), где m и n – целые положительньные числа. Докажите, что среди указанных прямоугольников всегда можно выбрать два, один из которых будет располагаться внутри другого.

Серия 17. .

1. Для положительных чисел x,y,z, удовлетворяющих условию $x^2+y^2+z^2=1$, докажите неравенство $\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

2. Набор положительных чисел $x_1,\ldots,x_n$ удовлетворяет условию $x_1+\ldots+x_n=1$. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{x_1}{1+x_2+x_3+\ldots+x_n}+\frac{x_2}{1+x_1+x_3+\ldots+x_n}+\ldots+\frac{x_n}{1+x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}.$$

3. 35 детей стоят в ряд и ждут завтрака. Время от времени какой-нибудь ребенок перепрыгивает через своего соседа (перепрыгнуть сразу через двух обессилевший от голода кружковец не может). Могут ли они вернуться в исходное положение ровно за 239 прыжков?

4. Числа 1, 2, ..., 1975 выписаны в строчку в порядке возрастания. Разрешено брать любые четыре числа, стоящие рядом, и переставлять их в обратном порядке. Можно ли с помощью таких операций переставить в обратном порядке все числа?

5. Две окружности касаются в точке A внешним образом. Касательная к одной из этих оеружностей в точке D пересекает другую окружность в точках B и C. Докажите, что AD – биссектриса внешнего угла BAC.

6. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке M. Точка N диаметрально противоположна точке M. Докажите, что прямая AN пересекает отрезок BC в точке касания вневписанной окружности.

Серия 18. Прощальная.

1. а) Найдите центр гомотетии, переводящей треугольник в его серединный треугольник.

б) (Прямая Эйлера) Докажите, что точка пересечения медиан треугольника лежит на одной прямой с ортоцентром и центром описанной окружности. В каком отношении она делит соединяющий их отрезок?

2. Две окружности касаются внешним образом. Прямая пересекает их в точках M, N, P, Q последовательно. Докажите, что из точки касания отрезки MQ и NP видны под углами, сумма которых равна $180°$.

3. а) Пусть $n = 3^k \cdot m$, где m не делится на 3. Докажите, что максимальная степень тройки, на которую делится число $4^n - 1$, равна 3^{k+1}.

б) Найдите все целые числа $n > 1$ такие, что $2^n + 1$ делится на n^2.

4. Можно ли покрасить прямоугольник 123×456 в два цвета так, чтобы у каждой клетки ровно два соседа имели другой цвет ?

5. Докажите, что

а) система двух уравнений $x^2 + 2y^2 = z^2, 2x^2 + y^2 = t^2$ не имеет решений в натуральных числах x, y, z, t.

б) система двух уравнений $x^2 + 5y^2 = z^2, 5x^2 + y^2 = t^2$ не имеет решений в натуральных числах x, y, z, t;

в) система двух уравнений $x^2 + 7y^2 = z^2, 7x^2 + y^2 = t^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y, z, t.

6. Дано 39-значное натуральное число A. Докажите, что существует такое 20-значное число B, что ни одно 39-значное натуральное число, получающееся из A перестановкой его цифр, не делится на B.

7. Решите в целых числах уравнение: $2^m + 3^n = k^2$.