Вступительная олимпиада, 7 августа 2006 г.

1. Найдутся ли три таких различных положительных числа a, b и c, что уравнения $ax+b=c$ и $x/a+1/b=1/c$ имеют общий корень?

2. Все натуральные делители натурального числа d занумеровали в порядке возрастания: $d_1<d_2<d_3<\ldots$. Оказалось, что $d_4+d_6+d_7=d$. Найдите число d (перечислите все возможности).

3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB равна стороне AE, а сторона BC равна стороне DE, точка F – середина отрезка CD. Докажите, что если $AF\perp CD$, то точка пересечения прямых BD и CE лежит на прямой AF.

4. Каждая из 55 участниц женского собрания написала, у скольких из присутствующих возраст (число полных лет) не совпадает с ее возрастом. К их ужасу оказалось, что каждая написала именно свой возраст в годах! Каково наибольшее количество различных чисел могло быть среди написанных возрастов?

5. Докажите, что число $2^{58}+1$ можно представить как произведение трех натуральных чисел, больших 1.

6. Можно ли разрезать квадрат на конечное число равнобедренных треугольников с углами 75° при основаниях?

7. Фишка может находиться в одной из 169 точек $(x;y)$, где x и y – целые числа, $0\leqslant x\leqslant 12$, $0\leqslant y\leqslant 12$. Фишка может пойти из точки (x_1,y_1) в точку (x_2,y_2), только если каждое из чисел $|x_1-x_2|,|x_1-y_2|,|y_1-x_2|,|y_1-y_2|$ не меньше двух и не больше девяти. Докажите, что фишка не может обойти все 169 точек, побывав в каждой из них ровно по разу.

8. На окружности, касающейся сторон угла с вершиной O, выбраны две диаметрально противоположные точки A и B (отличные от точек касания). Касательная к окружности в точке B пересекает стороны угла в точках C и D, а прямую OA – в точке E. Докажите, что $BC=DE$.

Серия 1, мотивировочная

1. Каждое из натуральных чисел a, b, c и d делится на натуральное число $ab-cd$. Докажите, что $ab-cd=1$.

2. Арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит точный квадрат. Докажите, что она содержит бесконечно много точных квадратов.

3. Найдите наименьшее натуральное число, большее 1, которое по крайней мере в 600 раз больше каждого своего простого делителя.

4. Простые числа p, q и натуральное число n удовлеяют соотношению $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}=\frac{1}{n}$. Найдите эти числа.

5. Даны положительные числа a, b, c, d. Докажите, что если $cd=1$, то на промежутке с концами ab и $(a+c)(b+d)$ найдется по крайней мере один квадрат целого числа.

6. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые нельзя представить в виде суммы квадрата целого числа и простого числа.

7. Натуральные числа $a_1,a_2,\ldots,a_n$, где $n\geqslant 12$, все большие 1 и меньшие $9n^2$, попарно взаимно просты. Докажите, что среди них найдется простое число.

8. Докажите, что число $53\cdot 83\cdot 109+40\cdot 66\cdot 96$ – составное.

Серия 2, про разложение на ...

1. Решите в целых числах уравнение $ab+a+b=160$.

2. Докажите, что число $2^{100}+3^{100}$ – составное.

3. Докажите, что $2^{2^{1998}}-1$ делится а) на 3; б) на 17.

4. Четное число U обладает следующим свойством: если оно делится на простое число p, то $U-1$ делится на $p-1$. Докажите, что U – натуральная степень 2.

5. a и n – натуральные числа. Докажите, что $a^{2n+1}+(a-1)^{n+2}$ делится на a^2-a+1.

6. Решите в целых числах уравнение $x^n=y(y+1)$.

7. а) Докажите, что $2^{3^{100}}+1$ делится на 3^{101}, и б) не делится на 3^{102}.

8. Множество A состоит из натуральных чисел, причем среди любых 100 идущих подряд натуральных чисел есть число из A. Докажите, что в A найдутся четыре различных числа a, b, c, d такие, что $a+b=c+d$.

Серия 3, по следам ликбеза

1. В городе X имеется 1000 коттеджей, в каждом из которых живет по одному человеку. В один прекрасный день каждый человек переезжает из своего дома в какой-либо другой (переезд осуществляется так, что после него в каждом доме живет один жилец). Докажите, что после переезда можно так покрасить все 1000 коттеджей синей, зеленой и красной красками, чтобы у каждого хозяина цвет его нового дома отличался от цвета старого дома.

2. Имеются две страны: *Обычная* и *Зазеркалье*. У каждого города в *Обычной* стране есть "двойник" в *Зазеркалье*, и наоборот. Однако если в *Обычной* стране какие-то два города соединены железной дорогой, то в *Зазеркалье* эти города не соединены, а любые два несоединенных в *Обычной* стране города обязательно соединены железной дорогой в *Зазеркалье*. В *Обычной* стране девочка Алиса не может проехать из города A в город B, сделав менее двух пересадок. Докажите, что Алиса в *Зазеркалье* сможет проехать из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.

3. Докажите, что $2001!!+2002!!$ делится на 2003. ($n!!=n(n-2)(n-4)\ldots$.)

4. P и $P^{P+1}+2$ – простые числа. Найдите P.

5. Докажите, что если a^2+ab+b^2 делится на $a+b$, то a^4+b^4 делится на $(a+b)^2$.

6. а) В кружке из 30 человек предстоит выбрать на очередной учебный год старосту, вице-старосту и хулигана (совмещение должностей не допускается). Сколькими способами это можно сделать?

б) А если нужно выбрать 3 хулиганов?

7. В каждой клетке квадрата 9×9 поставлена одна из отличных от нуля цифр так, что каждая цифра встречается в девяти клетках, и разность между любыми двумя цифрами, стоящими в одном столбце, не превосходит 3. Обозначим через S наименьшую из девяти сумм чисел, стоящих в одном столбце. Найти наибольшее возможное значение величины S при всевозможных расстановках цифр.

8. Пусть a, b и n – такие натуральные числа, что $a^{96}+b^{96}$ делится на n и $a^{100}+b^{100}$ делится на n. Докажите, что $a^{1996}+b^{1996}$ тоже делится на n.

9. а) Существуют ли такие простые числа p и q, что $pq=7(p+q)$?

б) Решите в простых числах уравнение $pqr=7(p+q+r)$?

Серия 4. Не забываем о ликбезе.

1. Докажите, что существует натуральная степень числа 3, оканчивающаяся цифрами $\ldots 0001$.

2. $a\equiv b \pmod m$. Докажите, что $(a,m)=(b,m)$.

3. Докажите, что если сумма двух натуральных чисел равна 30030, то их произведение не делится на 30030.

4. Докажите, что если у натурального N

а) нет простых делителей, не превосходящих $\sqrt{N}$, то N – простое;

б) нет простых делителей, не превосходящих $\sqrt[3]{N}$, то любой собственный делитель N прост.

5. Докажите, что $1^{1993}+2^{1993}+\ldots+1993^{1993}$ делится на $1+2+3+\ldots+1993$.

6. а) На какие числа может быть сократима дробь $\frac{7n-2}{4n-3}$ (в зависимости от n)?

б) Докажите, что дробь $\frac{a^4+3a^2+1}{a^3+2a}$ несократима при всех натуральных a.

7. Докажите, что $[a,b](a,b)=ab$ при всех натуральных a и b.

8. Сколькими способами из чисел от 1 до n можно выбрать k чисел?

9. Несколько команд сыграли однокруговой турнир по волейболу (в котором, как известно, не бывает ничьих). Будем говорить, что команда A сильнее команды B, если либо A выиграла у B, либо существует такая команда C, которая проиграла A и выиграла у B. Докажите, что победитель турнира (то есть любая команда, набравшая наибольшее количество очков) сильнее всех остальных).

10. В однокруговом турнире по волейболу с участием 12 команд ни одна из команд не одержала ровно семи побед. Докажите, что найдутся три команды A, B, C такие, что A выиграла у B, B у C, а C у A.

Серия 5. Наибольший общий делитель и пр.

1. Докажите, что $\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]} = \frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}$.

2. Пусть $\{a_n\}$ – последовательность чисел, определенная равенствами $a_1 = 1, a_n = na_{n-1} + (-1)^n$. Докажите, что a_n делится на $n-1$ при $n > 1$.

3. Для некоторых натуральных a и b число $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ – целое. Докажите, что $(a, b) \leqslant \sqrt{a+b}$.

4. $(1+\sqrt{2})^{2001} = a + b\sqrt{2}$, где a и b – целые числа. Докажите, что $(a, b) = 1$.

5. Найдите $(\underbrace{111\ldots111}_{m\ \text{единиц}}, \underbrace{111\ldots111}_{n\ \text{единиц}})$.

6. В некотором государстве $\frac{n^2-n+2}{2}$ городов. Любые два города соединены либо проселочной, либо шоссейной дорогой. Докажите, что путешественник сможет, пользуясь дорогами только одного типа, посетить n городов, побывав в каждом из них ровно по одному разу.

7. Натуральные числа a, b, c таковы, что a^b делится на c, b^c делится на a, а c^a делится на b. Докажите, что $(a+b+c)^{a+b+c}$ делится на abc.

8. Про натуральные числа x, y и z известно, что $(z+1)x^2 + x = zy^2 + y$. Докажите, что $y - x$ является точным квадратом.

9. Решите уравнение $(x+1)(x+2)(x+8)(x+9) = y^2$ в целых числах.

Серия 6, первая совершенная.

1. Остап Бендер организовал в городе Фуксе раздачу слонов населению. На раздачу явилось 28 членов профсоюза и 37 не членов, причем Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну не членам. Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О.Бендера?

2. Решите в целых числах уравнение $a(a+1) = b(b+2)$.

3. 10 белых и 20 черных фишек расставлены по окружности. Разрешается поменять местами любые две фишки, между которыми стоят еще три фишки. Две расстановки фишек (в данных 30 точках) назовем эквивалентными, если одну из них можно перевести в другую несколькими такими перестановками. Сколько существует неэквивалентных расстановок?

4. Число 4 обладает тем свойством, что при делении его на q^2 получается остаток меньше $q^2/2$, каково бы ни было q. Перечислите все числа, обладающие этим свойством.

5. Согласно установлениям государства ЛИПА, в одном лешике 101 лина. Некий любитель прекрасного решил приобрести несколько портретов начальницы лагеря по $n < 101$ лин за штуку. Однако в кармане у него нашлись только однолешиковые ассигнации, а в кассе — 1 лина сдачи. Докажите, что наш любитель прекрасного все же сможет купить не более 100 портретов, уплатив за них ровно столько, сколько они стоят.

6. a, b, c, d – натуральные числа, $ab = cd$.

а) Докажите, что существуют натуральные числа u_1, v_1, u_2, v_2, для которых $a = u_1v_1$, $b = u_2v_2$, $c = u_1u_2$, $d = v_1v_2$.

б) Докажите, что число $a + b + c + d$ – составное.

7. Докажите, что при всех $n > 2$ число $\varphi(n)$ четно.

8. Найдите $(2^m - 1, 2^n - 1)$.

9. Докажите, что для любых натуральных чисел n и k, $k < n$, $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

а) алгебраическим способом;

б) с помощью комбинаторных рассуждений.

Серия 7, скорее графская, чем не...

1. Докажите, что простое число не может двумя различными способами представляться в виде суммы двух квадратов.

2. Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$,

а) алгебраическим способом;

б) с помощью комбинаторных рассуждений.

3. Докажите, что если k – целое число, большее 1, то $3^k + 1$ не может делиться на 2^k.

4. В деревне Мартышкино у каждого мальчика все знакомые с ним девочки знакомы между собой. У каждой девочки среди ее знакомых количество мальчиков больше, чем количество девочек. Докажите, что в Мартышкино мальчиков живет не меньше, чем девочек.

5. В графстве Липшир из усадьбы каждого джентльмена выходит ровно 10 дорог к другим усадьбам. При этом каждый джентльмен может доехать по дорогам до любого другого. Однажды одну из дорог перекопали, и по ней стало невозможно проехать. Докажите, что любой джентльмен по-прежнему может нанести визит вежливости любому другому.

6. Сеть дорог в графстве Липшир устроена так, что из любого города можно добраться до любого другого ровно одним способом. Докажите, что есть город, соединенный с внешним миром ровно одной дорогой.

7. Докажите, что уравнение $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$ не имеет решений в целых числах, отличных от решения $x = y = z = 0$.

8. Докажите, что для любого натурального n существует n идущих подряд натуральных чисел, каждое из которых делится на точный квадрат, больший 1.

9. Докажите, что число $222\ldots22$ (1982 двойки) нельзя представить в виде $XY(X+Y)$, где X и Y – целые числа.

Серия 8, разношерстная

1. Решите в целых числах уравнение $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.

2. Пусть n – натуральное число. Докажите, что число упорядоченных пар натуральных чисел (u, v), для которых $[u, v] = n$, равно числу натуральных делителей n^2.

3. Число $(\sqrt{13} - 1)^{1994}$ представлено в виде $a + b\sqrt{13}$, где a и b – целые числа. Докажите, что a и b делятся на 2^{1993}.

4. Целое число a таково. что число $3a$ представляется в виде $x^2 + 2y^2$, где x и y – целые числа. Докажите, что и число a представимо в таком же виде.

5. Докажите, что при натуральном $m > 3$ $\sum\limits_{\substack{1 \leqslant x \leqslant m \\ x^2 - x + 1 \,\vdots\, m}} x$ делится на $m + 1$.

6. В стране провели анкету, в которой требовалось назвать любимого писателя, художника и композитора. Оказалось,что каждый упомянутый хоть раз деятель искусств является любимым ровно k людьми. Докажите, что всех проанкетированных можно разделить на $3k - 2$ группы так, что в каждой группе любые два человека имеют совершенно разные вкусы.

7. Можно ли в таблице 11×11 расставить натуральные числа от 1 до 121 так, чтобы числа, отличающиеся друг от друга на единицу, располагались в клетках с общей стороной, а все точные квадраты попали в один столбец?

8. В стране несколько городов. Между некоторыми из них в одном направлении летают самолеты. Известно, что существует город, вылетев из которого нельзя, перелетая из города в город, побывать во всех городах страны. Докажите, что часть городов может отделиться так, что ни в один из отделившихся городов нельзя будет попасть с помощью авиаперелетов ни из какого города оставшейся части.

Серия 9, теоретическая

1. Докажите, что $\sum\limits_{d|n}\varphi(d)=n$.

2. Докажите *теорему Эйлера*: если $(a,m)=1$, то $a^{\varphi}(m)\equiv 1 \pmod m$.

3. **Определение.** Вычеты a и b называются *ассоциированными*, если $ab\equiv 1 \pmod m$.

Пусть p — простое число.

а) Докажите, что для любого a, $1\leqslant a\leqslant p-1$, существует ровно один ассоциированный с a вычет.

б) Докажите, что если $x^2\equiv 1 \pmod p$, то $x\equiv \pm 1 \pmod p$.

в) Теорема Вильсона (E. Waring, Meditationes algebraicae, 1770). Докажите, что $(p-1)!\equiv -1 \pmod p$.

г) Докажите, что если для $m>1$ имеет место сравнение $(m-1)!\equiv -1 \pmod m$, то m — простое.

4. a – целое число, $(a,561)=1$. Докажите, что $a^{560}\equiv 1 \pmod{561}$.

5. Натуральное число a не делится на 17. Докажите, что a^8+1 или a^8-1 делится на 17. (Перебирать остатки запрещается!)

6. Докажите, что

а) любые две вершины дерева соединены ровно одним простым путем;

б) граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним простым путем, – дерево.

7. а) Докажите, что в дереве с n вершинами ровно $n-1$ ребро.

б) Докажите, что связный граф с n вершинами и $n-1$ ребром – дерево.

8. Натуральное число делится на 2 и на 9.

а) $d(n)=14$. Докажите, что существует единственное такое n.

б) $d(n)=15$. Докажите, что существует много таких n, и найдите их.

в) $d(n)=17$. Докажите, что таких n не существует.

Серия 10, с векторами.

1. M, N, P, Q – середины сторон AB, BC, CD и DE выпуклого пятиугольника $ABCDE$; F – середина MP, G – середина NQ. Докажите, что отрезок FG параллелен отрезку AE и имеет вчетверо меньшую длину,

а) с помощью векторов,

б) без помощи векторов.

2. а) AM – медиана треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$.

б) Докажите с помощью векторов, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

3. Докажите, что сумма векторов, идущих из центра правильного n-угольника в его вершины, равна $\overrightarrow{0}$.

4. На доске записаны дроби $\frac11,\frac12,\frac13,\frac14,\frac15,\frac16,\frac17,\frac18,\frac19,\frac1{10},\frac1{11},\frac1{12}$.

а) Можно ли перед каждой из этих дробей поставить знак "+" или "-" так, чтобы их сумма равнялась нулю?

б) Если нет, то какое наименьшее количество этих дробей надо стереть, чтобы, поставив перед оставшимися дробями знаки "+" или "-", можно было получить в сумме нуль?

5. Решите в натуральных числах уравнение $n^2+(n+1)^2=m^4+(m+1)^4$.

6. Маньяки Вася и Петя (Вася начинает) по одной перерезают веревочки волейбольной сетки, имеющей вид прямоугольника $m\times n$. Маньяк, после хода которого сетка распадается на куски, страшно огорчается и проигрывает. Кто из маньяков выиграет при правильной игре?

7. В графстве Липшир некоторые джентльмены знакомы друг с другом. Однако никакие два джентльмена, у которых поровну знакомых, общих знакомых не имеют. Докажите, что есть джентльмен, у которого ровно один знакомый.

8. В графстве Липшир между усадьбами любых двух из 100 джентльменов имеется либо водное сообщение (на лодочке), либо сухопутное (каретой). Не исключаются оба варианта. Докажите, что можно упразднить один из видов транспорта так, чтобы из любой усадьбы можно было проехать в любую другую (возможно, с пересадками).

Серия 11, полезная

1. Докажите формулу для площади треугольника: $S=\frac12 ab\sin\gamma$.

2. Докажите **теорему синусов**: в треугольнике $a=2R\sin\alpha$.

3. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

4. Докажите, что если векторы $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ перпендикулярны, то $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|$.

5. В графстве Эбандантшир можно было добраться из любого города в любой другой, но, возможно, более чем одним способом. Докажите, что м-р Скрудж, новый начальник ГАИ графства и известный борец за экономию, может закрыть несколько дорог так, чтобы любые два города оказались соединены единственным маршрутом.

6. Докажите, что при $0<k<p$ C_p^k делится на p, а) алгебраическим, б) комбинаторным способом.

7. Докажите *формулу степени бинома*, известную также под названием "бином Ньютона": $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^{n-2}a^2b^{n-2}+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$, а) алгебраическим, б) комбинаторным способом.

8. Зная, что $13717421=761^2+7\cdot 1370^2=439^2+7\cdot 1390^2$, разложите 13717421 на множители.

Серия 12, стимулирующая

1. Докажите, что $\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]}=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}$.

2. Докажите, что при любом натуральном n $\sqrt{n}\leqslant\frac{\sigma(n)}{d(n)}<\frac34 n$.

3. Натуральные числа x, y, z удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=z^2$. Докажите, что

а) xyz делится на 60;

б) если (x,y,z) – *примитивное решение* (т.е. $(x,y,z)=1$), то для некоторых натуральных u и v разной четности, $u>v$, $(u,v)=1$, либо $x=u^2-v^2, y=2uv, z=u^2+v^2$, либо $x=2uv, y=u^2-v^2, z=u^2+v^2$.

4. Докажите, что на окружности с центром в точке $(0;0)$ и радиусом $5^{m/2}13^{n/2}$ при любых натуральных m и n найдется точка с целыми координатами.

5. Имеется некоторое число карточек. На каждой из них написано натуральное число. Для каждого n, не превосходящего 2006, имеется ровно n карточек, на которых написаны числа, являющиеся делителями n.

а) Докажите, что число $2^{10}=1024$ написано хотя бы на одной карточке.

б) Докажите, что любое число $n\leqslant 2006$ записано хотя бы на одной карточке.

6. Докажите, что для различных натуральных m и n $(2^{2^m}+1, 2^{2^n}+1)=1$.

7. Найдите наибольшее натуральное n, которое при делении на любой точный квадрат, лежащий в промежутке от 2 до $\frac n2$, дает нечетный остаток.

8. Пусть $(a,b)=d$, $(a',b')=d'$. Докажите, что $(aa',ab',ba',bb')=dd'$.

Серия 13, упражнения к ликбезу и другие задачи.

1. Найдите $1+z+z^2+\ldots+z^{11}$, если $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2. Докажите, что ϵ является первоообразным корнем n-ной степени из единицы тогда и только тогда, когда все остальные корни n-ной степени из единицы являются его степенями.

3. Найдите сумму k-тых степеней корней n-ной степени из единицы.

4. а) Докажите, что при простом p выполнено сравнение $(a+b)^p \equiv a^p+b^p \pmod p$.

б) Докажите *малую теорему Ферма*: при простом p выполнено сравнение $n^p \equiv n \pmod p$.

5. Докажите, что произведение n последовательных натуральных чисел делится на $n!$,

а) комбинаторным путем;

б) рассматривая разложение на множители.

6. В стране 120 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, не проходящими через другие города. Из каждого города выходит хотя бы три дороги. Докажите, что существует несамопересекающийся циклический маршрут, состоящий не более, чем из 11 городов.

7. На плоскости дано несколько точек. Для некоторых пар A, B этих точек взяты векторы $\overrightarrow{AB}$, причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\overrightarrow{0}$.

8. На плоскости дано $2n$ векторов, ведущих из центра правильного $2n$-угольника в его вершины. Сколько из них нужно взять, чтобы их сумма имела максимальную длину?

9. Из каждой из вершин параллелограмма проведены векторы в середины всех его сторон. Докажите, что их сумма равна $\overrightarrow{0}$.

P. S. В задаче №4 решения, использующие полную или приведенную систему вычетов, не принимаются.

Серия 14. Массовый террор.

1. $z+\frac{1}{z}=1$. Найдите $z^n+\frac{1}{z^n}$ при всех натуральных n.

2. Прямая (B_1B_2) пересекает отрезок AC в точке B. Докажите, что $\frac{S_{\Delta AB_1B_2}}{S_{\Delta CB_1B_2}}=\frac{AB}{BC}$.

3. а) В вершинах A, B, C, D параллелограмма $ABCD$ помещены соответственно массы p, q, p, q. Докажите, что центром этих масс служит центр параллелограмма.

б) В вершинах параллелограмма $ABCD$ расположены такие массы m_A, m_B, m_C, m_D, что центр получающихся четырех материальных точек совпадает с центром параллелограмма. Докажите, что $m_A=m_C$, $m_B=m_D$.

4. (Теорема Ван-Обеля). Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке K. Докажите, что $\frac{AK}{KA_1}=\frac{AB_1}{B_1C}+\frac{AC_1}{C_1B}$, а) рассмотрением площадей, б) с помощью масс.

5. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 – середины сторон шестиугольника (в порядке обхода). Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ совпадают.

6. Внутри треугольника ABC выбрана произвольная точка O. Докажите, что справедливо равенство $S_{OAB}\cdot\overrightarrow{OC}+S_{OBC}\cdot\overrightarrow{OA}+S_{OCA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{0}$.

Пусть дана некоторая перестановка натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$. Пара (не обязательно стоящих рядом) чисел i и j этой перестановки образует *инверсию*, если $i<j$ и j стоит слева от i.

Перестановка любых двух из таких чисел называется *транспозицией*.

В естественной расстановке $1\ 2 \ldots n$ число инверсий равно нулю; в обратной $n\ n-1 \ldots 2\ 1$ – $\frac{n(n-1)}{2}$.

7. (Теорема об инверсиях). Докажите, что любая транспозиция меняет четность числа инверсий.

8. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\frac{ab}{a-b}=$ с. Известно также, что числа a, b и c не имеют общего для них всех натурального делителя, большего 1. Докажите, что $a-b$ есть точный квадрат.

9. a, b и n – фиксированные натуральные числа. Известно, что при любом натуральном k $(k\neq b)$ число $a-k^n$ делится без остатка на число $b-k$. Докажите, что $a=b^n$.

Серия 15: теперь еще и многочлены.

1. а) Докажите, что если α – корень многочлена $f(x) \bmod p$, (то есть $f(\alpha)\equiv 0 \pmod p$), то $f(x)\equiv (x-\alpha)g(x) \pmod p$ для некоторого многочлена $g(x)$ с целыми коэффициентами.

б) Докажите, что если $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ – корни многочлена $f(x) \bmod p$, то $f(x)\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)g(x) \pmod p$ для некоторого многочлена $g(x)$ с целыми коэффициентами.

в) Докажите, что многочлен степени $n>0$ может иметь не более n корней mod$p$.

г) Докажите, что $x^{p-1}-1\equiv(x-1)(x-2)\ldots(x-(p-1)) \pmod p$.

д) Выведите из утверждения п.г) теорему Вильсона.

2. Найдите коэффициенты при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(x^7+x^5+1)^{20}$.

3. У какого из многочленов $(1+x^2-x^3)^{1000}$ и $(1-x^2+x^3)^{1000}$ больший коэффициент при x^{20}?

4. а) p точек (p – простое) разбивают окружность на p равных дуг. Эти точки окрашиваются в n цветов. Сколько существует существенно различных раскрасок (существенно различными мы считаем раскраски, не переходящие друг в друга при поворотах окружности)?

б) Выведите из результата п.а) малую теорему Ферма.

5. (Дж. Чева, 1678). На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что

а) если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то $AB_1\cdot BC_1\cdot CA_1=AC_1\cdot CB_1\cdot BA_1$.

б) если $AB_1\cdot BC_1\cdot CA_1=AC_1\cdot CB_1\cdot BA_1$, то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.