Задачи С.-Петербургской летней школы 2008 г., старшая группа A
Вступительная олимпиада, 7 августа 2008 г.

1. Какое наибольшее количество натуральных чисел может стоять в ряд, если сумма любых 17 чисел подряд четна, а любых 18 чисел подряд – нечетна ?

2. Докажите, что при любых вещественных x, y, z выполняется неравенство

$$\sin x \cos y \sin z + \cos x \sin y \cos z \leqslant 1.$$

3. Точка D — середина стороны AC треугольника ABC, точка F лежит на стороне BC. Отрезки AF и BD пересекаются в точке E, и $AE = BC$. Докажите, что $BF = EF$.

4. На шахматной доске стоят несколько пешек. Докажите, что найдется “крест”, в котором стоит нечетное число пешек. (Крестом мы называем объединение вертикали и горизонтали.)

5. В стране 2008 городов. Каждый город связан авиалиниями с некоторыми другими, причем для каждого города число исходящих из него авиалиний есть степень двойки $(1, 2, 4, 8, \ldots)$. Для каждого города статистик подсчитал количество маршрутов из этого города в другие города, имеющих не больше одной пересадки. Докажите, что сумма всех полученных чисел не может быть равна 2000000.

Выводные задачи

6. Окружность проходит через вершины A и C остроугольного треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC в точках D и E. Точки D_1 и E_1 симметричны точкам D и E соответственно относительно основания высоты треугольника, опущенной на сторону AC. Прямые CD_1 и AE_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $\angle AKC = \angle ABC$.

7. Найдите все пары простых чисел p и q такие, что $p^2 - p + 1 = q^3$.

8. На острове живут 90 рыцарей и 10 нормальных людей. Рыцари всегда говорят правду, а нормальные люди могут говорить как правду, так и ложь. Разрешается выбрать любое множество жителей острова и спросить любого аборигена, есть ли в этом множестве нормальные люди. Докажите, что за 10 вопросов можно гарантированно найти хотя бы одного рыцаря.

Серия 1, разминочная

1 (Ол-6). Окружность проходит через вершины A и C остроугольного треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC в точках D и E. Точки D_1 и E_1 симметричны точкам D и E соответственно относительно основания высоты треугольника, опущенной на сторону AC. Прямые CD_1 и AE_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $\angle AKC = \angle ABC$.

2 (Ол-7). Найдите все пары простых чисел p и q такие, что $p^2 - p + 1 = q^3$.

3 (Ол-8). На острове живут 90 рыцарей и 10 нормальных людей. Рыцари всегда говорят правду, а нормальные люди могут говорить как правду, так и ложь. Разрешается выбрать любое множество жителей острова и спросить любого аборигена, есть ли в этом множестве нормальные люди. Докажите, что за 10 вопросов можно гарантированно найти хотя бы одного рыцаря.

4. Даны натуральное число k и многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что при любом целом x число $P(Q(x)) - x$ делится на k. Докажите, что число $Q(P(x)) - x$ тоже делится на k при любом целом x.

5. На сторонах AB, BC и AC остроугольного треугольника ABC выбраны точки C', A' и B' соответственно так, что треугольники ABC и $A'B'C'$ соответственно подобны. Докажите, что ортоцентр треугольника $A'B'C'$ совпадает с центром описанной окружности треугольника ABC.

6. На прямой даны два отрезка. Найдите геометрическое место точек, из которых они видны под равными углами.

7. а) Докажите, что $2x^3 + y^3 \geqslant 3x^2y$ для всех $x, y \geqslant 0$.

б) Какое наименьшее значение принимает выражение $\frac{x^6+y^6+z^6}{x^3y^2z}$ при $x, y, z > 0$?

8. Докажите, что многочлен вида $ax^{10} - ax^9 + bx^8 + cx^7 + \ldots + kx - \frac{k}{100}$ не может иметь 10 различных положительных корней.

9. Рассмотрим мнрожество всех ограниченных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ со следующим расстоянием: $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|\}$. Докажите, что это метрическое пространство.

Серия 2, многочленистая

10. Последовательность чисел задана формулой $x_n = \frac{2n^2+3n+1}{3n^2+10n+7}$. Докажите, что она имеет предел в $\mathbb{R}$ и найдите его.

11. В метрическом пространстве последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x, а последовательность $\{y_n\}$ – к точке y. Докажите, что $|x_n y_n| \to |xy|$.

12. Пусть A – открытое множество, B – замкнутое множество в метрическом пространстве. Докажите, что а) $A \setminus B$ открыто; б) $B \setminus A$ замкнуто.

13. Пусть A – подмножество метрического пространства. Его *замыканием* называется множество всех точек пространства, которые являются пределами последовательностей, лежащих в A.

а) Найдите замыкание открытого круга на плоскости.

б) Докажите, что замыкание любого множества замкнуто.

14. Пусть P – многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что при каждом $n = 1, 2, \ldots, 2008$ значение $P(n)$ – трехзначное натуральное число. Докажите, что P не имеет целых корней.

15. Непостоянные многочлены $P(z)$ и $Q(z)$ с комплексными коэффициентами таковы, что их множества комплексных корней совпадают, а также совпадают множества комплексных корней многочленов $P(z)-1$ и $Q(z)-1$. Докажите, что эти многочлены равны.

16. Пусть f – многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что уравнение $f(x)=x$ не имеет решений в целых числах. Докажите, что уравнение $f(f(f(x)))=x$ тоже не имеет решений в целых числах.

17. Пусть f – многочлен с вещественными коэффициентами. Известно, что уравнение $f(x)=x$ не имеет решений в вещественных числах. Докажите, что уравнение $f(f(f(x)))=x$ тоже не имеет решений в вещественных числах.

Серия 3, содержащая важные идеи

18. Расстоянием от точки x до множества A в метрическом пространстве (обозначение: $\operatorname{dist}(x,A)$) называется точная нижняя грань расстояний между x и точками из A. Зафиксируем множество A и определим функцию $f: X \to \mathbb{R}$ равенством $f(x)=\operatorname{dist}(x,A)$. Докажите, что эта функция непрерывна.

19. Пусть Y – подпространство метрического пространства X. Пусть A – множество в Y. Докажите, что A открыто в пространстве Y тогда и только тогда, когда в X существует такое открытое множество B, что $A=B\cap Y$.

20. AB – хорда окружности S. Окружности S_1 и S_2 касаются окружности S в точках P и Q соответственно и отрезка AB в точке K. Оказалось, что $\angle PBA=\angle QBA$. Докажите, что AB – диаметр окружности S.

21. Различные простые числа p и q таковы, что при некотором целом $k>2$ число $p^2+kpq+q^2$ – точный квадрат. Докажите, что $(p-2)(q-2)\leqslant k+2$.

22. Пусть p,q — простые числа, $q>5$. Докажите, что если число 2^p+3^p кратно q, то $q>p$.

23. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $P(x)>0$ при $x\geqslant 0$. Последовательность a_0, a_1, a_2, $\ldots$ задана соотношениями $a_0=0$ и $a_n=P(a_{n-1})$ при $n\geqslant 1$. Докажите, что для любых натуральных n,k

а) $(a_n,a_k)=a_{(n,k)}$, где скобки обозначают наибольший общий делитель;

б) $a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+k}$ делится на $a_1a_2\ldots a_k$.

24. Пусть f – непостоянный многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что среди простых делителей чисел $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\ldots$, найдется число, большее миллиона.

25. Пусть A — множество всех бесконечных целочисленных последовательностей. Каждой последовательности $s\in A$ сопоставлено целое число $f(s)$ так, что

1) $f(s+t)=f(s)+f(t)$ для любых последовательностей $s,t\in A$;

2) если в последовательности s все члены, начиная с некоторого, равны 0, то $f(s)=0$.

Докажите, что $f(s)=0$ для всех $s\in A$.

26. Пусть $a,b,c,d>0$. Докажите, что а) $\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}\geqslant\frac{4}{3}$;

б) $\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geqslant\frac{2}{3}$.

27. В некотором языке всего две буквы: a и b. Два слова означают одно и то же в том и только в том случае, если их можно получить друг из друга вычеркиванием или вставкой в произвольные места выражений aa, bbb, или заменой ab на bba и обратно. Сколько в этом языке различных значений слов?

Серия 4, где нужно применить теорию

28 (Теорема о вложенных компактах). Пусть $A_1, A_2, A_3, \ldots$ — бесконечная последовательность непустых компактных множеств в метрическом пространстве, причем каждое следующее содержится в предыдущем: $A_{n+1}\subset A_n$ при всех n. Докажите, что пересечение всех этих множеств непусто.

29. На плоскости дано ограниченное множество, состоящее из более чем одной точки. Докажите, что среди (замкнутых) кругов, содержащих это множество, найдется круг минимального радиуса, причем единственный.

30. а) Даны $n\in\mathbb{N}$ и $P>0$. Докажите, что среди всех выпуклых многоугольников, у которых периметр равен P и число вершин не больше n, найдется многоугольник максимальной площади.

б) Докажите, что многоугольник из пункта а) – это правильный n-угольник.

в) **(Изопериметрическое неравенство)** Докажите, что для любого многоугольника выполняется неравенство $P^2\geqslant 4\pi S$, где P – периметр, S – площадь.

31. На основании AC треугольника ABC взяты точки M и N так, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABM и CBN, равны. Докажите, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABN и CBM, также равны.

32. На окружности S выбраны точки A и B. Точка C – середина одной из дуг AB, а D – некоторая точка отрезка AB. Окружность S_1 касается отрезков BD (в точке B_1), CD и окружности S. Окружность S_2 касается продолжения отрезка AB за точку B (в точке B_2), окружности S (в точке K) и продолжения отрезка CD за точку D. Доказать, что $\angle B_1KB_2$ – прямой.

33. В n-элементном множестве выбрано 2^{n-1} различных подмножеств, любые три из которых имеют непустое пересечение. Докажите, что все эти подмножества имеют непустое пересечение.

34. Дано n различных натуральных чисел. На доску выписали все их попарные наибольшие общие делители и наименьшие общие кратные. Докажите, что среди выписанных чисел есть не менее n различных.

35. Пара различных натуральных чисел называется хорошей, если у них одинаковые наборы простых делителей. Докажите, что существует бесконечно много хороших пар чисел (m,n) для которых пара $(m+1,n+1)$ также является хорошей.

36. Пусть $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_n=a_{n-2}+a_{n-3}$ при $n>3$. Докажите, что при любом простом p число a_p делится на p.

Серия 5, не только про числа

37. Пусть p – простое число. Определим p-адическое расстояние между целыми числами формулой $d(a,b)=\frac{1}{p^k}$, где p^k – наибольшая степень p, на которую делится число $a-b$ (в случае $a=b$ полагаем $d(a,b)=0$). а) Докажите, что $\mathbb{Z}$ с этим расстоянием — метрическое пространство. б) Является ли оно полным?

38. Пусть X, Y – метрические пространства. Отображение $f: X \to Y$ называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых точек $x, x' \in X$ таких, что $|xx'| < \delta$, верно, что $|f(x)f(x')| < \varepsilon$.

а) Приведите пример непрерывной, но не равномерно непрерывной функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

б) Докажите, что для компактного X любое непрерывное отображение $f: X \to Y$ равномерно непрерывно.

39. Докажите, что сумма расстояний от точки внутри тетраэдра до его вершин не превосходит суммы длин ребер.

40. Натуральное k таково, что число $p = 2^{2k} + 2^k + 1$ – простое. Докажите, что а) p является делителем числа $2^{2^k+1} - 1$; б) k — степень тройки.

41. Натуральные числа a, b, c, d удовлетворяют равенству $a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd$. Докажите, что число $a+b+c+d$ составное.

42. M – некоторое множество простых чисел, в котором больше одного элемента. Известно, что для всякого конечного подмножества $N \subset M$ число $(\prod\limits_{k\in N} k) - 1$ имеет простые делители только из M. Докажите, что M совпадает с множеством всех простых чисел.

43. В стране n городов и $2n-1$ дорог с односторонним движением (каждая дорога соединяет два города, дороги не пересекаются). Известно, что из любого города можно доехать по дорогам в любой другой. Докажите, что можно закрыть одну дорогу так, что это свойство сохранится.

44. На окружности отмечено 100 точек. Для каждой пары точек, дуга между которыми не превосходит $60°$, провели соединяющий их отрезок. Каково минимально возможное число отрезков?

45. Пусть $Oxyz$ — прямоугольная система координат в пространстве, M — конечное множество точек пространства и M_x, M_y, M_z — множества ортогональных проекций всех точек M на плоскости Oyz, Ozx, Oxy соответственно. Докажите, что $|M|^2 \leqslant |M_x| \cdot |M_y| \cdot |M_z|$.

Серия 6, разнообразная

46 (Принцип сжимающих отображений). Пусть X – метрическое пространство. Отображение $f: X \to X$ называется *сжимающим*, если существует такое $q < 1$, что $|f(x)f(y)| \leqslant q|xy|$ для любых $x, y \in X$.

а) Докажите, что любое сжимающее отображение полного пространства в себя имеет неподвижную точку, то есть такую точку x, что $f(x) = x$.

б) Приведите пример функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, не имеющей неподвижных точек и удовлетворяющей условию $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ для любых различных x и y.

47. Докажите, что компактное метрическое пространство не может быть изометрично своему подмножеству, отличному от него самого.

48. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки Q и P соответственно так, что точка пересечения отрезков BP и CQ лежит на биссектрисе AL угла A. При этом $\angle APQ = \angle ALB$. Докажите, что PQ – биссектриса угла APB.

49. Про натуральные числа a, b, c и d известно, что $\frac{a^2+b}{a+c} = d$. Докажите, что $d \leqslant b + (c-1)^2$.

50. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Докажите, что если число $\frac{a^2+b^2}{ab-1}$ целое, то оно равно 5.

51. Дан многочлен $F(x)$ с целыми коэффициентами, причем известно, что для любого целого n число $F(n)$ делится на одно из целых чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_m. Докажите, что из этих чисел можно выбрать одно число так, что $F(n)$ будет делиться на него для любого целого n.

52. Возрастающая последовательность натуральных чисел обладает следующими свойствами: (i) $a_{2n} = a_n + n$; (ii) если a_n простое, то и n – простое. Докажите, что $a_n = n$ для всех n.

53. Назовем лабиринтом шахматную доску 100×100, где между некоторыми полями вставлены перегородки, но так, что ладья может передвигаться по всей доске, не перепрыгивая через перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа край доски или перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Конечную последовательность таких команд назовем программой. Даны два лабиринта, в каждом стоит ладья. Докажите, что есть программа, выполнив которую, каждая ладья окажется в верхней правой клетке своего лабиринта.

Серия 7, в которой много комбинаторики

54. а) Докажите, что в целочисленной сети (то есть все пропускные способности – целые числа) среди максимальных потоков существует целочисленный.

б) Пусть (S_1, T_1) и (S_2, T_2) – минимальные разрезы в сети G. Докажите, что разрез $(S_1 \cup S_2, T_1 \cup T_2)$ тоже минимален.

55 (вершинная теорема Менгера). Дан граф, в нем выбраны несмежные вершины a и b. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что следующие два свойства равносильны:

(i) Существует k путей из a в b, не имеющих друг с другом общих вершин, кроме a и b.

(ii) При удалении любых $k-1$ вершин, отличных от a и b, в графе сохраняется хотя бы один путь из a и b.

56. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана такая точка K, что $\angle AKC = 2\angle ABC$, и $AK/KC = (AB/BC)^2$. Точки A_1 и C_1 – середины сторон BC и AB. Докажите, что точка K лежит на описанной окружности

треугольника A_1BC_1.

57. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, прямые AD и BC – в точке Q. Прямая PE пересекает BC в точке X, прямая QE пересекает AB в точке Y. Докажите, что отрезок XY проходит через точку пересечения симедиан треугольника ABC.

58. Пусть x, y, n – натуральные числа, $n > 1$, $x^n + 1 = y^{n+1}$. Докажите, что $(x, n+1) > 1$.

59. Докажите, что для любого многочлена $p(x)$ степени больше 1 с целыми коэффициентами найдется непостоянная целочисленная бесконечная в обе стороны арифметическая прогрессия, которая не содержит ни одного члена вида $p(k)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

60. В полном графе с n вершинами выбрали некоторое дерево с n вершинами и покрасили его ребра в два цвета. Докажите, что остальные ребра можно докрасить в эти же цвета так, чтобы в любом треугольнике было нечетное число ребер цвета 1.

61. Картинная галерея имеет форму невыпуклого многоугольника (стороны многоугольника – это стены галереи). Для любых трех точек A, B и C, лежащих на стенах галереи, найдется точка X, из которой видны и A, и B, и C (то есть отрезки XA, XB и XC содержатся в многоугольнике). Докажите, что в галерее есть точка, из которой видна она вся.

Серия 8, на выходной

62. а) Дан связный граф, не являющийся циклом нечетной длины. Докажите, что его ребра можно раскрасить в два цвета так, чтобы к любой вершине степени не меньше двух примыкали ребра обоих цветов.

б) Пусть G – двудольный граф. Докажите, что $\chi'(G) = \Delta(G)$, где $\chi'(G)$ – реберное хроматическое число, $\Delta(G)$ – максимальная степень вершин графа.

63. Дан граф. Пусть d – минимальная степень его вершин. Докажите, что его ребра можно раскрасить в $d-1$ цвет так, чтобы к любой вершине примыкали ребра всех цветов.

64. X – компакт, отображение $f : X \to X$ таково, что $|f(x)f(y)| < |xy|$ для любых различных $x, y \in X$. Докажите, что у f есть неподвижная точка.

65. Натуральные числа разбиты на несколько арифметических прогрессий (каждое число принадлежит ровно одной из них). Докажите, что среди этих прогрессий найдутся две с одинаковой разностью.

66. В графстве между некоторыми усадьбами установлено одностороннее или двустороннее сообщение. Докажите, что существует усадьба A со следующим свойством: из любой усадьбы, до которой можно доехать из A, можно вернуться в A.

67. В множестве, состоящем из n элементов, выбрано $n+1$ подмножество, каждое из которых содержит нечетное число элементов. Докажите, что пересечение каких-то двух из них также содержит нечетное число элементов.

68. Точка P находится вне окружности с центром O. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 проходят через точку P, причем ℓ_1 касается окружности в точке A, а ℓ_2 пересекает окружность в точках B и C. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке X. Докажите, что AX и PO перпендикулярны.

69. Пусть σ – перестановка на множестве $M = \{1, 2, \ldots, p-1\}$ (где $p > 2$ – простое число). Докажите, что для некоторых различных $i, j \in M$ выполняется сравнение $i\sigma(j) \equiv j\sigma(i) \pmod p$.

70. В двух урнах лежит $2p+1$ шар. Каждую секунду половина шаров из той урны, где лежит четное количество шаров, перекладывается в другую урну. Пусть $k < 2p+1$ – некоторое натуральное число, и известно, что числа p и $2p+1$ – простые. Докажите, что рано или поздно в одной из урн будет ровно k шаров.

Серия 9, с производной вдоль вектора

71. а) В пространстве $\mathbb{R}^3$ дана точка A. Рассмотрим функцию $f(X) = |AX|$. Докажите, что ее производная в точке $X \neq A$ вдоль вектора v равна $|v| \cdot \cos\alpha$, где α – угол между векторами v и $\overrightarrow{AX}$.

б) Внутри тетраэдра $ABCD$ нашлась точка X, в которой сумма расстояний до вершин достигает минимума. Докажите, что $\angle AXB = \angle CXD$.

72. Пусть a, b, c – натуральные числа. $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $a+b+c$. Докажите, что какие-то два из чисел a^3, b^3, c^3 дают одинаковые остатки при делении на $a+b+c$.

73. Для любых натуральных чисел $n > m$ докажите неравенство

$$[m, n] + [m+1, n+1] > \frac{2mn}{\sqrt{n-m}},$$

где $[x, y]$ — наименьшее общее кратное чисел x и y.

74. Докажите, что для любого натурального числа a существует бесконечно много натуральных n, таких что число $a^{2^n} + 2^n$ – составное.

75. В наборе чисел a, b, c к одному из чисел разрешено добавлять разность между двумя другими, умноженную на любое рациональное число. Докажите, что из набора $0, 1, \sqrt{2}$ нельзя получить набор $0, 2, 1+\sqrt{2}$.

76. У Феди есть три палочки. Если из них нельзя сложить треугольник, Федя укорачивает самую длинную из палочек на сумму длин двух других. Если длина палочки не обратилась в нуль и треугольник снова нельзя сложить, то Федя повторяет операцию, и т.д. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

77. Из точки A к данной окружности S проведены касательные AB и AC. На средней линии треугольника ABC, параллельной стороне BC, выбраны точки X и Y. Отрезки касательных из точек X и Y к S пересеклись в точке Z. Докажите, что четырехугольник $AXZY$ – описанный.

78. Профессор Тарантога сформулировал n определений *сепуления*. Аспиранты профессора по очереди защищали диссертации на тему: “Сепуление в смысле i-го определения является сепулением в смысле j-го определения”. При этом никакая из диссертаций не следовала из защищенных ранее. Какое наибольшее количество диссертаций могли защитить аспиранты Тарантоги?

Матбой: группа СТ-А против кружка 10 класса.

1. Докажите, что если многочлен $f(x)$ неотрицателен на отрезке $[0, 1]$, то его можно представить в виде $f(x) = xp(x) + (1 - x)q(x)$, где многочлены p и q неотрицательны на $\mathbb{R}$.

2. Пусть A_n — последовательность попарно пересекающихся множеств натуральных чисел, каждое из которых содержит не более 2000 элементов. Докажите, что существует конечное множество B натуральных чисел такое, что пересечение любых двух множеств A_i и A_j $(1 \leq i, j < \infty)$ содержит хотя бы один элемент множества B.

3. На плоскости отмечено несколько (замкнутых) кругов так, что каждая точка содержится не более чем в ста отмеченных кругах. Докажите, что найдется отмеченный круг такой, что его пересекает не более чем 699 других отмеченных кругов.

4. Натуральное число p таково, что число $4x^2 + p$ — простое для любого $x = 0, 1, \ldots, p-1$. Найдите все такие p.

5. На прямой задан отрезок. Точка этого отрезка называется хорошей, если она либо совпадает с одним из концов этого отрезка, либо делит какой-нибудь отрезок с хорошими концами в отношении один к трём (считая слева или справа). Докажите, что середина исходного отрезка — не хорошая точка.

6. В стране 100 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, но никакой город не соединен со всеми. Из любого города в любой другой можно доехать, заезжая по дороге не более, чем в один город. Какое наименьшее количество дорог может быть в этой стране?

7. Вписанная в остроугольный треугольник ABC окружность ω касается стороны BC в точке K. Точка M — середина высоты AD треугольника, прямая KM вторично пересекает окружность ω в точке $N \neq K$. Докажите, что описанная окружность треугольника BCN касается окружности ω.

8. Найдите все непостоянные многочлены $p(x)$ и $q(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, для которых $2^{p(n)} - 1$ делится на $q(n)$ при всех натуральных n.

9. В трапеции $ABCD$ точка M — середина боковой стороны CD, точка P — середина BM, точка Q — середина AM. Докажите, что точка пересечения прямых DQ и CP лежит (строго) внутри четырехугольника $ABCD$.

10. Непрерывная функция $f : [0, 1] \to [0, 1]$ такова, что для любого $x \in [0, 1]$ найдется натуральное k такое, что $f^{\circ(k)}(x) = 0$ ($f^{\circ(k)}$ — это k-ая итерация функции f). Докажите, что найдется такое k, не зависящее от x.

Серия 10, с неявной функцией

79. Дан угол AOB. По лучу OA от точки O с единичной скоростью движется точка X. Точка Y движется по лучу OB так, что периметр треугольника OXY остается постоянным.

а) Докажите, что зависимость длины отрезка OY от времени – гладкая функция, и выразите ее производную через $\alpha = \angle OXY$ и $\beta = \angle OYX$.

б) Рассмотрим площадь треугольника OXY как функцию от времени. Докажите, что ее производная обращается в ноль только при $OX = OY$.

80. Каких чисел от 1 до 1 000 000 больше: тех, которые представляются в виде $2x^2 - 3y^2$ для некоторых натуральных x, y или тех, которые представляются в виде $10xy - x^2 - y^2$ для некоторых натуральных x, y?

81. Докажите, что на ребрах любого выпуклого многогранника можно так расставить стрелки, чтобы в каждую вершину входило не более трех стрелок.

82. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Касательная к окружности в точке A пересекает прямую BC в точке A_1, аналогично определяются точки B_1 и C_1. Докажите, что A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, перпендикулярной OL, где L – точка пересечения симедиан.

83. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, AC и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что прямая A_1B_1 и прямые, содержащие биссектрису угла A и среднюю линию, параллельную AC, пересекаются в одной точке.

84. Докажите, что для положительных чисел a, b, c и d, таких что $a + b + c + d = 1$, справедливо неравенство

$$\frac{1}{1-\sqrt{a}} + \frac{1}{1-\sqrt{b}} + \frac{1}{1-\sqrt{c}} + \frac{1}{1-\sqrt{d}} \geqslant 8.$$

85. Докажите, что если многочлен $f(x)$ неотрицателен на отрезке $[0, 1]$, то его можно представить в виде $f(x) = xp(x) + (1 - x)q(x)$, где многочлены p и q неотрицательны на $\mathbb{R}$.

86. Непрерывная функция $f : [0, 1] \to [0, 1]$ такова, что для любого $x \in [0, 1]$ найдется натуральное k такое, что $f^{\circ(k)}(x) = 0$ ($f^{\circ(k)}$ — это k-ая итерация функции f). Докажите, что найдется такое k, не зависящее от x.

Серия 11, числа простые и не очень

87. Пусть a и m – взаимно простые натуральные числа. Докажите, что количество решений сравнения $x^2 \equiv a \pmod{m}$ равно либо 0, либо степени двойки.

88. Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots$ – все простые числа, перечисленные в порядке возрастания. Докажите, что при достаточно большом n выполняется неравенство

а) $\frac{1}{1-1/p_1} \cdot \frac{1}{1-1/p_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-1/p_n} > 10^{10}$;

б) $\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p_n}\right)>10^{10}$;

в) $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}>10^{10}$.

89. Докажите, что в любом бесконечном подмножестве натурального ряда найдутся два элемента, сумма которых имеет простой делитель, больший миллиона.

90. Квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ с целыми коэффициентами обладает таким свойством: для любого натурального m найдется натуральное x такое, что $f(x)$ делится на m. Докажите, что $f(x)$ имеет рациональный корень.

91. В остроугольном треугольнике ABC отмечена такая точка A_1, что $\angle BAA_1=\angle CBA_1$ и $CAA_1=\angle BCA_1$. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и ортоцентр треугольника лежат на одной окружности.

92. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На стороне AC нашлась такая точка L, что отрезок A_1L делится пополам высотой CC_1, а отрезок C_1L делится пополам высотой AA_1. Докажите, что $HL\perp OH$, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.

93. Каково наибольшее возможное количество подмножеств 100-элементного множества можно выбрать так, чтобы каждое из этих подмножеств и пересечение любых двух из них содержало четное количество элементов?

Серия 12, понемногу обо всем

94. Числа $x,y,z\in\mathbb{R}$ таковы, что $x+y+z=x^2+y^2+z^2=1$. Докажите, что $x^3+y^3+z^3\geqslant\frac{5}{9}$.

95. Пусть k – натуральное число. Для каждого целого n от 0 до 3^k обозначим через b_n степень тройки с наибольшим показателем, на которую делится число $C_{3^k}^n$. Найдите сумму $\sum\limits_{n=0}^{3^k}\frac{1}{b_n}$.

96. Многочлен f степени n с целыми коэффициентами имеет n различных вещественных корней. Многочлен g с целыми коэффициентами имеет ровно один общий корень с f. Докажите, что этот корень – рациональное число.

97 (обобщенная теорема о бабочке). Точки A,B,C,D лежат на окружности. Прямая, содержащая хорду XY этой окружности, пересекает прямые AC и BD в точках, симметричных относительно середины XY. Докажите, что точки пересечения XY с AD и BC тоже симметричны относительно середины XY.

98. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $\angle ABC=\angle ADC=\angle 135^\circ$. На лучах AB и AD за точками B и D лежат точки M и N соответственно такие, что $\angle MCD=\angle NCB=90^\circ$. Описанные окружности треугольников AMN и ABD пересекаются в точках A и K. Докажите, что $\angle AKC=90^\circ$.

99. Пусть a,b,c – векторы на плоскости. Докажите неравенство

$$|a|+|b|+|c|+|a+b+c|\geqslant|a+b|+|b+c|+|a+c|.$$

100. В каждой клетке таблицы $n\times n$ написана некоторая буква, при этом все строки данной таблицы различны. Докажите, что существует столбец, при вычеркивании которого строки оставшейся таблицы по-прежнему будут различными.

101. При удалении из графа любой вершины остальные вершины можно разбить на пары смежных. Докажите, что через любую вершину этого графа проходит цикл нечетной длины, все вершины которого различны.

Серия 13: сведения из теории чисел

102. Пусть p – нечетное простое число.

а) Пусть $p=4k+1$. Докажите, что

$$2^{\frac{p-1}{2}}\cdot(2k)!\equiv 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 4k\equiv(-1)^k\cdot(2k)!\pmod p.$$

б) Докажите, что если $p=8k+1$, то 2 – квадратичный вычет по модулю p, а если $p=8k+5$, то 2 – квадратичный невычет по модулю p.

в) Докажите, что 2 является квадратичным вычетом по модулю p тогда и только тогда, когда p дает остаток 1 или 7 по модулю 8.

г) Для каких простых p число -2 является квадратичным вычетом по модулю p?

103. а) Пусть $p=8k+1$ – простое. Докажите, что $p=x^2+2y^2$ для некоторых $x,y\in\mathbb{N}$.

б) Докажите, что число вида $8k+1$ является простым тогда и только тогда, когда оно единственным способом представимо в виде x^2+2y^2, где x и y – взаимно простые натуральные числа.

104. Докажите, что $\phi(a^n-1)$ делится на n для любых натуральных $a>1$ и $n>1$. (Через ϕ обозначается функция Эйлера: $\phi(m)$ – это количество натуральных чисел от 1 до m, взаимно простых с m.)

105. Последовательность a_1, a_2, ... задается следующим образом: a_n – это наименьшее натуральное число, не встречающееся среди чисел a_1, ..., a_{n-1} и такое, что $a_1+a_2+\ldots+a_n$ делится на n. Докажите, что

а) в последовательности a_1-1, a_2-2, a_3-3, ... встречаются все целые числа по одному разу;

б) в последовательности a_1, a_2, a_3, ... встречаются все натуральные числа (по одному разу);

в) если $a_n=m$, то $a_m=n$.

г) Обозначим $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\alpha+1$. Докажите, что множество пар вида (n,a_n) совпадает с множеством пар вида $([k\alpha]+1,[k\beta]+1)$ и $([k\beta]+1,[k\alpha]+1)$, где k – целое неотрицательное число.

Серия 14, комбинаторная

106. Натуральные числа a и b таковы, что a^2+b^2+1 делится на ab. Докажите, что а) $\frac{a^2+b^2+1}{ab}=3$; б) a и b входят в последовательность чисел Фибоначчи.

107. Пусть x_1, x_2, …, x_n — положительные числа. Докажите, что

$$\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2x_3}+\frac{x_2^2}{x_2^2+x_3x_4}+\ldots+\frac{x_n^2}{x_n^2+x_1x_2}\leqslant n-1.$$

108. Существует ли такая непрерывная функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что ее значение в каждой рациональной точке иррационально, а значение в каждой иррациональной точке рационально?

109. На плоскости в вершинах правильного n-угольника сидят тараканы. Они одновременно начинают двигаться со скоростью v по сторонам многоугольника, каждый в сторону соседнего по часовой стрелке таракана, и продолжают двигаться равномерно и прямолинейно. По некоторой прямой на плоскости равномерно со скоростью v_1 движется энтомолог Вася. Через некоторое время оказалось, что Вася раздавил трех тараканов. Докажите, что $v=v_1$.

110. Докажите, что если многоугольник можно разбить на доминошки (прямоугольники 1×2), то хотя бы одна из его сторон имеет четную длину.

111. Дан связный граф с четным числом вершин. Докажите, что из него можно убрать несколько (возможно, ноль) ребер так, чтобы в оставшемся графе степени всех вершин были нечетны.

112. На плоскости отмечено несколько точек, из каждой проведены три луча, не проходящих через другие отмеченные точки. Докажите, что области, на которые разбилась плоскость, можно правильно раскрасить в три цвета.

113. На плоскости даны две замкнутые 15-звенные ломаные. Все 30 вершин ломаных различны и никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что можно выбрать в каждой ломаной по одному звену так, чтобы выбранные звенья были противоположными сторонами некоторого выпуклого четырехугольника.

Серия 15, окончательная и бесповоротная

114. Точка M находится внутри диаметра AB окружности S, но не совпадает с его центром. По одну сторону от диаметра AB на окружности S взяты две различнеы точки P и Q так, чтобы отрезки PM и QM образовывали с AB равные углы. Докажите, что все такие прямые PQ проходят через одну точку.

115. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что выполняется тождество $P(x^2-x+1)\equiv Q(x^2+x+1)$. Докажите, что оба многочлена – константы.

116. Из картона вырезаны два одинаковых правильных 111-угольника. Вершины каждого из них занумерованы числами от 1 до 111 в произвольном порядке. Докажите, что их можно наложить один на другой (возможно, перевернув) так, чтобы никакие две вершины с одинаковым номером не совпали.

117. Докажите, что в выпуклый многоугольник площади S и периметра P можно поместить окружность радиуса $\frac{S}{P}$.

118. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ верно неравенство

$$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\ldots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)\geqslant(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n).$$