Задачи С.-Петербургской летней школы 2008 г., старшая группа С

Вступительная олимпиада, 7 августа 2008 г.

1. Какое наибольшее количество натуральных чисел может стоять в ряд, если сумма любых 17 чисел подряд четна, а любых 18 чисел подряд – нечетна ?

2. Докажите, что при любых вещественных x, y, z выполняется неравенство

$$\sin x \cos y \sin z + \cos x \sin y \cos z \leqslant 1.$$

3. Точка D — середина стороны AC треугольника ABC, точка F лежит на стороне BC. Отрезки AF и BD пересекаются в точке E, и $AE = BC$. Докажите, что $BF = EF$.

4. На шахматной доске стоят несколько пешек. Докажите, что найдется "крест", в котором стоит нечетное число пешек. (Крестом мы называем объединение вертикали и горизонтали.)

5. В стране 2008 городов. Каждый город связан авиалиниями с некоторыми другими, причем для каждого города число исходящих из него авиалиний есть степень двойки $(1, 2, 4, 8, \ldots)$. Для каждого города статистик подсчитал количество маршрутов из этого города в другие города, имеющих не больше одной пересадки. Докажите, что сумма всех полученных чисел не может быть равна 2000000.

Выводные задачи

6. Окружность проходит через вершины A и C остроугольного треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC в точках D и E. Точки D_1 и E_1 симметричны точкам D и E соответственно относительно основания высоты треугольника, опущенной на сторону AC. Прямые CD_1 и AE_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $\angle AKC = \angle ABC$.

7. Найдите все пары простых чисел p и q такие, что $p^2 - p + 1 = q^3$.

8. На острове живут 90 рыцарей и 10 нормальных людей. Рыцари всегда говорят правду, а нормальные люди могут говорить как правду, так и ложь. Разрешается выбрать любое множество жителей острова и спросить любого аборигена, есть ли в этом множестве нормальные люди. Докажите, что за 10 вопросов можно гарантированно найти хотя бы одного рыцаря.

Серия 1(с). Будем посчитать!

1. Разность шестизначных чисел $\overline{abcdef}$ и $\overline{fdebca}$ делится на 271. Докажите, что $b = d$ и $c = e$.

2. Найдите наименьшее значение выражения а) $|9^k - 5^l|$, б) $|11^k - 5^l|$, в) $|36^k - 5^l|$ при натуральных k и l.

3. Докажите, что для любых натуральных x и y число НОД$(x + y, xy) -$ НОД(x, y) четно.

4. Для некоторых натуральных a и b число $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ – целое. Докажите, что $(a, b) \leqslant \sqrt{a + b}$.

5. В треугольнике ABC угол B равен $60°$, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке I. Докажите, что $ID = IE$.

6. Стороны и диагонали 55-угольника раскрашены в 54 цвета. Может ли быть так, что из каждой вершины выходят ребра всех цветов?

7. Решите в натуральных числах уравнение $x^3 + y^3 + 1 = 3xy$.

8. Докажите, что при разных натуральных m и n числа 2^m и 2^n имеют различные наборы цифр (с учетом кратности).

9. Можно ли из набора гирь $3^1, \ldots, 3^n$ выбрать два набора одинакового веса?

Серия 2. Все на поиски клада!!!

1. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = z^5$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

2. Докажите, что если прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке K внутри треугольника, то выполняются равенства: а) $\frac{KA_1}{AA_1} + \frac{KB_1}{BB_1} + \frac{KC_1}{CC_1} = 1$; б) $\frac{KA}{AA_1} + \frac{KB}{BB_1} + \frac{KC}{CC_1} = 2$.

3. Города страны соединены авиалиниями. Из столицы выходит 21 линия, из города Дальний — одна, а из каждого из остальных городов — по двенадцать авиалиний. Докажите, что из столицы можно долететь до города Дальний (возможно, с пересадками).

4. Инструкция по отысканию клада гласит: "Для того, чтобы найти клад, нужно стать под березой лицом к прямой линии, соединяющей дуб и сосну. При этом дуб должен оказаться справа, а сосна слева. Затем нужно пойти к дубу, считая шаги. Дойдя до дуба, повернуть под прямым углом направо и пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до дуба. В этом месте остановиться и поставить вешку. Затем следует вернуться к березе и пойти от нее к сосне, считая шаги. Дойдя до сосны, повернуть под прямым углом налево и пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до сосны. В этом месте остановиться и поставить вешку. Клад зарыт точно посредине между вешками." Прибыв на место, кладоискатель обнаружил, что дуб и сосна налицо, а от березы не осталось и следа. Как найти клад?

5. Найдите все натуральные числа, меньшие 300, у которых ровно 15 делителей.

6. **Теорема Менелая**. Точки A_1, B_1, C_1 расположены на сторонах треугольника ABC или на их продолжениях. Докажите, что они лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = -1$.

7. На окружности стоят 10 целых чисел, сумма которых равна 1. Сколько есть пятерок чисел подряд, сумма которых больше 0?

8. В строку выписано 10 натуральных чисел, ни одно из которых не делится на 10. Докажите, что из них можно выбрать несколько стоящих рядом, сумма которых делится на 10.

9. Докажите, что в треугольнике ABC чевианы AA_1, BB_1CC_1 пеесекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle BCC_1}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle ABB_1}\cdot\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle CAA_1}=1$.

Серия 3. Лови момент!

1. а) Выведите конечную формулу для суммы перых n квадратов натуральных чисел. б) Докажите, что $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$.

2. **Прямая Симсона**. Если из какой-либо точки окружности опущены перпендикуляры на все стороны вписанного в неё треугольника (или на их продолжения), то основания этих перпендикуляров лежат на одной прямой.

3. Внутри треугольника ABC отметили точку Z и провели через неё и вершины треугольника прямые, пересекающие стороны в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Тогда прямые AA_2, BB_2, CC_2, симметричные прямым AA_1, BB_1, CC_1 относительно биссектрис соответствующих углов треугольника, пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что среднее арифметическое нескольких проложительных чисел a_1, a_2, …, a_n не превосходит их среднего квадратического: $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$.

5. Докажите, что сумма цифр числа 1981^n не меньше 19.

6. Докажите тождество $F_{m+n}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$ (F_k — k-ое число Фибоначчи).

7. В городе с любой станции метро можно проехать (возможно, с пересадками) на любую другую. Докажите, что можно закрыть одну станцию (без права проезда через нее) так, чтобы с любой из оставшихся станций можно было проехать на любую другую.

8. Пусть p_1, p_2, p_3 – квадратные трехчлены с положительными старшими коэффициентами. Докажите, что если каждые два из них имеют общий корень, то квадратный трехчлен $p_1+p_2+p_3$ имеет корень.

9. Постройте циркулем и линейкой на плоскости такую точку S, чтобы сумма квадратов её расстояний до вершин многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ была наименьшей.

10. Дан треугольник ABC. Пусть O — точка пересечения его медиан, а M, N и P — точки сторон AB, BC и CA, делящие эти стороны в одинаковых отношениях (т.е. $AM:MB=BN:NC=CP:PA=p:q$). Докажите, что O — точка пересечения медиан треугольника, образованного прямыми AN, BP и CM.

Серия 4. Солянка.

1. Докажите, что $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\geqslant\frac{n}{2}$.

2. Докажите, что произведение любых k подряд идущих натуральных чисел делится на $k!$.

3. В графе из $2n$ вершин n^2+1 ребро. Докажите, что есть три вершины, попарно соединенные ребром.

4. Точка X расположена внутри параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $S_{\triangle ABX}+S_{\triangle CDX}=S_{\triangle BCX}+S_{\triangle ADX}$.

5. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $B_1C_1\perp OA$, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.

6. **Малая теорема Дезарга.** Пусть в $\triangle ABC$ вписан $\triangle A_1B_1C_1$ так, что A_1 лежит на прямой BC, B_1 — на прямой CA и C_1 лежит на AB; пусть прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке S. Если кадая из трёх пар прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 пересекается, то эти три точки пересечения лежат на одной прямой.

Определение. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на два множества таким образом, что каждое ребро будет соединять вершины из разных множеств.

7. а) Докажите, что в двудольном графе все циклы имеют чётную длину.

б) В графе все циклы имеют чётную длину. Докажите, что граф двудольный.

8. На чемпионате по футболу каждая команда сыграла с каждой ровно один раз, причём ничьих не было. По правилам этого чемпионата, каждой команде X вручался приз при условии, что для любой команды Y, одержавшей над X победу, существовала команда Z, обыгравшая Y, но проигравшая X. По итогам турнира, приз получила ровно одна команда. Докажите, что она выиграла все матчи.

9. Докажите, что координаты точки Z_l – изогонального образа точки $Z(p,q,r)$ — выражаются следующим образом: $Z_l=\left(\frac{a^2}{p},\frac{b^2}{q},\frac{c^2}{r}\right)=\left(\frac{\sin^2\alpha}{p},\frac{\sin^2\beta}{q},\frac{\sin^2\gamma}{r}\right)$.

10. Докажите, что для любых вещественных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ и $b_1,b_2,\ldots,b_n$ выполняется неравенство

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2).$$

Серия 5. В поисках приключений.

1. Точки, соответствующие комплексным числам z_1, z_2, …, z_n лежат в вершинах выпуклого n-угольника. Докажите, что если связаны соотношением $\frac{1}{z_1-c}+\frac{1}{z_2-c}+\ldots+\frac{1}{z_n-c}=0$, то точка c лежит внутри этого n-угольника.

3. $2a+3b+6c=0$. Докажите, что уравнение ax^2+bx+c имеет корень на отрезке $[0,1]$.

4. Инструкция по отысканию клада гласит: "Для того, чтобы найти клад, нужно встать под пальмой с номером 1, лицом к пальме с номером 2. Затем нужно пройти ровно половину расстояния до пальмы с номером 2 и повернуться лицом к пальме с номером 3. Затем нужно пройти ровно треть расстояния до пальмы с номером 3 и повернуться лицом к пальме с номером 4, и так далее. На k-ом этапе нужно пройти ровно $1/(k+1)$ расстояния до пальмы с номером $k+1$ и повернуться лицом к пальме с номером k. На последнем этапе нужно пройти ровно $1/2008$ расстояния до пальмы с номером 2008. Если все сделано правильно, то на глубине двух метров точно под тобой будет клад."

Прибыв на место, кладоискатель обнаружил, что на всех 2002 пальмах стерлись номера. За какое наименьшее число попыток он заведомо найдет клад?

5. Ребра полного графа из 30 вершин раскрашены в 14 цветов. Докажите, что существует цикл из ребер одного цвета.

6. Докажите, что квадрат 6×6 – “непрочный”, т.е. что если этот квадрат сложить из прямоугольников 1×2, то найдется не пересекающая прямоугольников прямая, разбивающая квадрат на 2 части.

7. На сторонах треугольника внешним образом построены правильные треугольники. Докажите с помощью комплексных чисел, что их центры образуют правильный треугольник.

8. **Теорема Стюарта.** В треугольнике ABC проведена чевиана CC_1. Докажите, что

$$CC_1^2=\frac{C_1B}{AB}\cdot CA^2+\frac{C_1A}{AB}\cdot CB^2-C_1A\cdot C_1B.$$

9. Пусть $f(x)=x^2-2$. Докажите, что у многочлена $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n\text{ раз}}(x))\ldots))$ есть 2^n различных вещественных корней.

10. $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами. Известно, что многочлен $P(x^3)+xQ(x^3)$ делится на x^3-1. Докажите, что $P(x)$ и $Q(x)$ оба делятся на $x-1$.

11. Докажите, что если число $a=2^{2k}+2^k+1$ не является делителем числа $2^{2^k+1}-1$, то a — составное.

Серия 6. Многочленная.

1. Докажите, что при изотомическом сопряжении относительно данного треугольника образы его ортоцентра и центра вписанной окружности попадают на прямую, соединяющую точки Нагеля и Жергонна.

2. $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $|P(3)|=|P(7)|=1$. Докажите, что $P(x)$ не имеет целых корней.

3. Каждое из целых чисел $a_0,a_1,\ldots,a_{2005}$ не меньше (-1) и не все равны 0, причем $a_0+2a_1+4a_2+\ldots+2^{2005}a_{2005}=0$. Докажите, что $a_0+a_1+\ldots+a_{2005}>0$.

4. а) Все точки плоскости раскрашены в два цвета: красный и зелёный. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 метр. б) Докажите, что найдётся равносторонний треугольник с верши нами одного цвета. в) Некоторые точки перекрасили в чёрный. Докажите, что по-прежнему найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 метр.

5. Даны два правильных пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $A_1B_2B_3B_4B_5$ (вершины указаны по часовой стрелке). Докажите, что прямые A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 и A_5B_5 пересекаются в одной точке.

6. Пусть n – натуральное число, а p – простое, большее двух. Докажите, что многочлен x^n+2^p приводим над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда n делится на p.

7. Докажите, что если два кубических многочлена с целыми коэффициентами имеют общий иррациональный корень, то они имеют еще один общий корень.

8. Докажите, что если a,b,c – стороны треугольника, то $a^3b+b^3c+c^3a\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

9. Докажите, что для любых n и m существует такой неприводимый многочлен $P(x)$ степени n с целыми коэффициентами, что любой другой многочлен $Q(x)$ с целыми коэффициентами, каждый из которых отличается от соответствующего коэффициента многочлена $P(x)$ не более чем на m, также будет неприводимым. (Многочлен называется неприводимым, если он не представляется в виде произведения двух многочленов с целыми коэффициентами меньшей степени.)

Серия 7, подсказательно-показательная.

1. а) Докажите следующий *критерий Эйзенштейна* неприводимости многочленов: многочлен с целыми коэффициентами $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, у которого коэффициенты a_0, a_1, a_2, …, a_n делятся на простое число p, а свободный член a_0 не делится на p^2, неприводим над $\mathbb{Z}$.

б) Докажите **китайскую теорему об остатках**: пусть $m_1,m_2,\ldots,m_n$ — попарно взаимно простые натуральные числа. Докажите, что для любых целых $r_1,r_2,\ldots,r_n$ существует натуральное X, такое, что для любого $1\leqslant i\leqslant n$ $X\equiv r_i \pmod{m_i}$.

2. Докажите, что многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, который при трех различных значениях x принимает значение 1, не может иметь ни одного целого корня.

3. Через точки A и B проведены три окружности S_1,S_2,S_3. Окружности S_1 и S_2 касаются S, а окружность S_3 перпендикулярна S. Докажите, что угол между S_3 и S_1 равен углу между S_3 и S_2.

4. На окружности имеется 21 точка. Докажите, что среди дуг, имеющих концами эти точки, найдется не меньше 100 таких, угловая мера которых не превышает $120°$.

5. Докажите, что если числа $m,n\in\mathbb{N}$ удовлетворяют неравенству $\sqrt{7}-m/n>0$, то $\sqrt{7}-m/n>1/mn$.

Определение. Решением сравнения по модулю называется вычет, удовлетворяющий данному сравнению.

6. а) Решите сравнение: $6x\equiv 1 \pmod{11}$ б) Сколько решений может иметь сравнение $ax\equiv c \pmod{m}$, где m не обязательно простое?

в) (*Теорема Вильсона*) Докажите, что $(p-1)!\equiv -1 \pmod{p}$ тогда и только тогда, когда p— простое число.

7. Найдите остаток от деления многочлена $x^{1988}-x^{1987}+x^{1702}-x^{811}+7$ на x^2+x-2.

8. Докажите, что если многочлены с целыми коэффициентами $x^2+p_1x+q_1$ и $x^2+p_2x+q_2$ имеют общий не целый корень, то $p_1=p_2$ и $q_1=q_2$.

9. Докажите, что все простые делители числа Мерсенна $M_p=2^p-1$ (p — простое) имеют вид $2kp+1$ с некоторым натуральным k.

10. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD – в точке Q. Докажите, что если каждая из трех пар биссектрис: внешних углов четырехугольника при вершинах A и C, внешних углов при вершинах B и D, а также внешних углов при вершинах Q и P (треугольников QAB и PBC соответственно) имеет точку пересечения, то эти три точки лежат на одной прямой.

Серия 8. Несчитаемая.

1. Стороны треугольника видны из точки O под равными углами. Докажите, что для любой точки M, лежащей внутри треугольника ABC $OA+OB+OC \leqslant MA+MB+MC$.

2. Докажите, что сумма кубов трех корней уравнения $x^3+px+q=0$ с целыми коэффициентами есть целое число, делящееся на 3.

3. a, b, c, d, e – различные действительные числа. Докажите, что при всех e, отличных от a, b, c, d

$$\frac{(e-a)(e-b)(e-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{(e-a)(e-b)(e-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{(e-a)(e-c)(e-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{(e-b)(e-c)(e-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}=1.$$

4. **Определение:** α – вычет по простому модулю p – является корнем mod$p$ многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами, если $f(\alpha)\equiv 0 \pmod p$.

В этой задаче p – простое число, все сравнения для многочленов $\bmod p$ – формальные, то есть два многочлена сравнимы mod$p$, если сравнимы их коэффициенты при каждой степени x.

а) Докажите, что если α — корень многочлена $f(x) \pmod p$, то $f(x)\equiv(x-\alpha)g(x) \pmod p$ для некоторого многочлена $g(x)$ с целыми коэффициентами. б) Докажите, что если $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ - корни многочлена $f(x)$ $\pmod p$, то $f(x)\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)g(x) \pmod p$ для некоторого многочлена $g(x)$ с целыми коэффициентами. в) Докажите, что многочлен степени $n>0$ может иметь не более n корней mod$p$. г) Докажите, что $x^{p-1}-1\equiv(x-1)(x-2)\ldots(x-(p-1)) \pmod p$. д) Выведите из утверждения пункта г) теорему Вильсона.

5. Найдите знакочередующуюся сумму а) $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^{n-2}C_n^{n-2}+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}+(-1)^nC_n^n$.

б) Докажите тождество $C_{n-1}^0+C_{n-2}^1+C_{n-3}^2+\ldots+C_{[n/2]}^{[(n-1)/2]}=F_n$, где F_n — n-е число Фибоначчи.

6. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AC, AB и BC в точках K, M и N соответственно. Медиана BB_1 треугольника пересекает MN в точке D. Докажите, что точка O лежит на прямой DK.

7. Докажите, что все простые делители чисел Ферма $2^{2^n}+1$ имеют вид $2^{n+1}k+1$ с некоторым натуральным k.

8. В стране 1000 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что один из концов любой дороги является городом, из которого выходит не более 10 дорог. Какое наибольшее количество дорог может быть в этой стране?

9. Если окружность вписана в сегмент и касается дуги в точке A_1, а хорды BC — в точке A_2, то прямая A_1A_2 является биссектрисой угла BA_1C.

10. Пусть AB – дуга окружности и точка C – середина дополнительной дуги. Окружности ω_1 и ω_2 вписаны в двуугольник, образованный дугой AB и хордой AB, и касаются внешним образом. Проведем через точку касания окружностей ω_1 и ω_2 их общую касательную a. Докажите, что прямая a проходит через точку C.

Серия 9. Теорема Брианшона.

1. Докажите, что числитель дроби $\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}$ а) делится на p при простом $p>2$, б) (теорема Вольстенхольма, 1862) делится на p^2 при простом $p>3$.

2. а) Найдите центр гомотетии, переводящей треугольник в его серединный треугольник.

б) (Прямая Эйлера) Докажите, что точка пересечения медиан треугольника лежит на одной прямой с ортоцентром и центром описанной окружности. В каком отношении она делит соединяющий их отрезок?

3. Найдите сумму: а) $C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots+C_n^{3k}+\ldots$; б) $C_n^1+C_n^4+C_n^7+\ldots+C_n^{3k+1}+\ldots$; в) $C_n^2+C_n^5+C_n^8+\ldots+C_n^{3k+2}+\ldots$.

4. а) Равные отрезки AB и CD касаются окружности S в точках A и D. Докажите, что существует окружность, касающаяся этих отрезков в точках B и C. б) S_1,S_2,S_3 — три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Докажите, что три радикальные оси пар окружностей S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_1 пересекаются в одной точке. в) Докажите **теорему Брианшона**: диагонали описанного шестиугольника пересекаются в одной точке.

5. В треугольнике ABC сумма расстояний от точки Торричелли до вершин равна $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}S}$, где S — площадь этого треугольника и a, b, c — длины соответствующих сторон.

6. На диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$ взята точка L такая, что $AB=AL$. На луче DC взята точка F такая, что $DB=DF$. Точка E симметрична B относительно AD. Докажите, что точки F, L и E лежат на одной прямой.

7. Докажите, что при любом натуральном n к любому делителю $n!$, отличному от самого $n!$, можно прибавить такой делитель $n!$, что сумма снова будет делителем $n!$.

8. Два сумасшедших геометра по очереди отмечают точки на плоскости, причем после каждого хода любые три отмеченные точки должны образовывать треугольник площадью не меньше 1 и не больше 1000. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из геометров имеет выигрышную стратегию?

9. Докажите тождество при любом нецелом x:

$$\frac{C_n^0}{x}-\frac{C_n^1}{x+1}+\ldots+(-1)^n\frac{C_n^n}{x+n}=\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}.$$

Серия 10. Повторение — мать ученья.

1. Пусть p, q — простые числа, $q > 5$. Докажите, что если $q \mid 2^p + 3^p$, то $q > p$.

2. Внутри данного треугольника ABC найдите точку X такую, что периметр треугольника образованного основаниями перпендикуляров, опущенных из X на стороны ABC минимальный.

3. а) Докажите, что для любого простого p и натуральных n и k среди чисел $C_n^k, C_{n+1}^k, C_{n+2}^k, \ldots, C_{n+k}^k$ найдётся число, не делящееся на p.

б) Докажте, что для любого k существует бесконечно много n, таких, что $C_n^k, C_{n+1}^k, C_{n+2}^k, \ldots, C_{n+k-1}^k$ не делятся на p.

4. В стране провели анкету, в которой требовалось назвать любимого писателя, художника и композитора. Оказалось,что каждый упомянутый хоть раз деятель искусств является любимым ровно k людьми. Докажите, что всех проанкетированных можно разделить на $3k-2$ группы так, что в каждой группе любые два человека имеют совершенно разные вкусы.

5. В другой стране некоторые пары городов соединены авиалиниями, причём каждый город соединён не менее, чем с половиной других городов. Докажите, что можно найти такой маршрут облёта городов, который начинается и заканчивается в одном и том же городе и каждый город посещает ровно один раз.

6. Обозначим через a, b и c стороны треугольника ABC, $a+b+c=2p$, G — центр масс, O — центр описанной окружности, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно. Доказать справедливость следующих соотношений: а) $a^2+b^2+c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$; б) $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$.

7. Докажите, что если $p = 4n-1$ простое и $(2k-1, p) = 1$, то $[n + k(k-1)]^{2n-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

8. Окружности S_1 и S_2 касаются хорды AB, проведённой в окружности S, в точке C. S_1 касается дуги AB в точке D, а S_2 касается дополнения дуги AB в точке E. AB делит угол $\angle CAD$ пополам. Докажите, что AB — диаметр окружности.

Серия 11. Выданная с целью разжижения несуществующей субстанции.

1. Найдите все такие простые числа p и q, что $2^p + 1$ делится на q, а $2^q + 1$ делится на p.

2. Вычислите сумму $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$.

3. a, b и c – цифры, причем $b^2 - 4ac$ – квадрат целого числа. Докажите, что число $\overline{abc}$ составное.

4. В квадрат со стороной 1 поместили 51 точку. Докажите, что найдутся три из них, лежащие внутри круга радиуса $1/7$.

5. Докажите, что центр тяжести треугольника, его образ при изогональном сопряжении и образ ортоцентра при изотомическом сопряжении лежат на одной прямой.

6. На плоскости расположена фигура, площадь которой меньше 1. Докажите, что фигуру можно сдвинуть так, чтобы она не покрывала ни одного узла целочисленной решетки.

7. Пусть A, B, C, D – четыре произвольные точки плоскости, не лежащие на одной окружности, и никакие три из этих точек не лежат на одной прямой. Докажите, что угол между окружностями, описанными вокруг треугольников ABC и ABD, равен углу между окружностями, описанными вокруг треугольников CDA и CDB.

8. Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, такую, что среди значений $0, f(0), f(f(0)), \ldots$ найдутся повторяющиеся. Придумайте алгоритм, использующий не зависящий от d и p объём памяти, который найдёт длину периода p и предпериода d последовательности за время $O(d+p)$.

Математический бой группы СТ-3 против Р.Р.Сахипова, 22 августа 2008 г.

1. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z) + 5 = 0$ не имеет решений в рациональных числах.

2. В треугольнике ABC проведены медианы BD, AK и CE, которые пересекаются в точке M. Известно, что $\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{CE} \neq 1$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABM и CBM, касаются прямой AC.

3. Можно ли прямоугольник $4 \times 1,5$ разрезать на 2 части, которыми оборачивается единичный куб?

4. Какое наибольшее число равных по модулю коэффициентов может иметь кубический многочлен, корнями которого являются три различных целыхчисла?

5. Имеется три внешне одинаково выглядящие монеты, одна из которых фальшивая, причем неизвестно, легче она или тяжелее настоящей. Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без гирь узнать, отрегулированы весы или нет? (У неотрегулированных весов при взвешивании одна из чашек всегда “завышает” вес.)

6. Площадь треугольника с вершинами в узлах целочисленной решетки равна $\frac{1}{2}$. Может ли наименьшая из его сторон быть больше 2000?

7. Шахматная доска 8×8 клеток разбита на 32 прямоугольника размера 2×1 каждый. Два прямоугольника назовем “соседними”, если они имеют более чем одну общую точку. Двое играют на этой доске в следующую игру. В левом нижнем углу стоит фишка первого игрока, в левом верхнем – второго. Игроки ходят по очереди. Начинает первый. Ход заключается в переставлении своей фишки на соседний прямоугольник. Выигрывает тот игрок, который первым доберется до противоположного угла доски. Существует ли такое разбиение доски, при котором при правильной игре обоих игроков выигрывает второй? (Во время игры обе фишки могут оказаться в одном прямоугольнике).

8. Пусть a_1, a_2, …, a_n – такие натуральные числа, что всевозможные их суммы (по одному, по два, …,, по n (всего $2^n - 1$ сумм) попарно различны. Докажите, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < 2$.

9. В классе, в котором учатся 20 человек, каждые два либо дружат, либо, в противном случае, враждуют. Известно, что среди любых трех учащихся по крайней мере двое дружат. В классе на собрании произошла ссора, после которой некоторые пары поссорились, а некоторые подружились, причем так, что все равно среди любых трех учащихся хотя бы двое дружат. Докажите, что не менее 30 пар, друживших до ссоры, остались дружить.

10. Найдите все натуральные числа a, b и c такие, что корни уравнений $x^2-2ax+b=0$, $x^2-2bx+c=0$, $x^2-2cx+a=0$ являются натуральными числами.

Серия 12. Образцово-показательная.

1. Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. N – точка пересечения B_1C_1 и AA_1. Докажите, что $\frac{A_1N}{NA}=2\frac{A_1M}{MA}$.

2. а) Пусть фигура Φ на плоскости имеет площадь больше 1. Тогда найдутся две точки A и B, принадлежащие фигуре Φ, такие, что вектор $\overrightarrow{AB}$ целочисленный (то есть его координаты — целые числа). б) (Г.Минковский) Пусть на координатной плоскости имеется центральносимметричная (относительно начала координат) выпуклая фигура Φ площади больше 4. Тогда она содержит целую точку, отличную от начала координат.

3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — такие натуральные числа, что всевозможные их суммы (по одному, по два, …по n (всего 2^n-1 сумм) попарно различны. Докажите, что $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$.

4. В классе, в котором учатся 20 человек, каждые два либо дружат, либо враждуют. Известно, что среди любых трёх учащихся по крайней мере двое дружат. В классе на собрании произошла ссора, после которой некоторые пары поссорились, а некоторые подружились, причём так, что всё равно среди любых трёх учащихся хотя бы двое дружат. Докажите, что не менее 30 пар, друживших до ссоры, остались дружить.

5. Докажите, что $2^{10}+5^{12}$ — составное число.

6. Докажите, что для любого натурального n $\quad \{n\sqrt{2}\}>\frac{1}{2n\sqrt{2}}$.

7. Учащиеся изучают $n\geqslant 3$ предметов. Известно, что по любому предмету отличниками являются ровно 3 ученика и что для любых двух предметов ровно один ученик является отличником по обоим из них. При каком наименьшем n можно утверждать, что некоторый ученик — отличник по всем предметам.

8. Степень любой вершины графа не превосходит d. Докажите, что его вершины можно покрасить в d^2+1 цвет таким образом, чтобы расстояние между любыми двумя вершинами одного цвета было более двух.

Определение. Говорят, что целое число a, взаимно простое с m, принадлежит по модулю m к показателю d, если d — наименьшая натуральная степень, для которой $a^d\equiv 1 \pmod m$.

9. а) Пусть a принадлежит по модулю m к некоторому показателю d. Докажите, что тогда a^k, $k\in\mathbb{N}$, принадлежит к некоторому делителю d.

Начиная с пункта б), речь идет о вычетах и показателях по простому модулю p.

б) Пусть a принадлежит к показателю d. Докажите, что все вычеты, принадлежащие к делителям d, находятся среди вычетов $1, a, a^2, \ldots, a^{d-1}$.

в) Докажите, что вычетов, принадлежащих к показателю d, имеется или 0, или $\varphi(d)$.

г) Докажите, что для любого $d\mid p-1$ имеется ровно $\varphi(d)$ вычетов, принадлежащих к показателю d.

Серия 13. The Final Cut.

1. Докажите, что в описанном четырёхугольнике диагонали и отрезки, соединяющие точки касания противоположных сторон со вписанной окружностью, пересекаются в одной точке.

2. Окружность касается сторон треугольника AB и BC треугольника ABC в точках D и E, а также описанной окружности треугольника (внутренним образом). Докажите, что DE проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

3. Окружности с центрами A, B и C попарно касаются друг друга в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что точки пересечения пар прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 лежат на одной прямой.

4. Автобусная сеть на острове Невезения обладает следующими замечательными свойствами: (i) у каждых двух автобусных маршрутов есть ровно одна общая остановка; (ii) для каждых двух автобусных остановок существует ровно один соединяющий прямой маршрут; (iii) на каждом маршруте ровно 8 остановок; (iv) через каждую остановку проходят ровно 8 маршрутов.

а) Сколько на этом острове автобусных остановок? б) Сколько на нем автобусных маршрутов? в) Докажите, что такой остров (в океане) есть.

5. В магазине 5 пустых пивных бутылок можно обменять на бутылку молока, а 10 пустых молочных бутылок — на бутылку пива. С. В. нашёл в подвале 60 пустых бутылок и стал их обменивать. В конце у него осталась одна пивная бутылка (бутылки, получаемые при обменах, С. В. использовал в последующих обменах). Сколько пивных бутылок нашёл С. В. в подвале?

6. Докажите, что при любых натуральных $a>1$ и n число $\varphi(a^n-1)$ делится на n.

7. (Теорема Блихфельдта). Докажите, что расположенную на плоскости с целочисленной решеткой фигуру площади S можно параллельно перенести так, чтобы внутрь фигуры попало а) не более $[S]$ узлов; б) не менее $[S]$ узлов (а если S не целое, то не менее $[S]+1$).

8. $P(x), Q(x), R(x)$ – ненулевые многочлены с рациональными коэффициентами. Известно, что $P(x)Q(x)+Q(x)R(x)+R(x)P(x)=1$. Докажите, что у этих многочленов не может быть общих корней.

Серия 14. Деревянная гомотетия.

1.На окружности даны точки A, B, C. Хорды, соединяющие середину дуги AC с серединами дуг AB и BC, пересекают отрезки AB и BC соответственно в точках K и H. Докажите, что KH проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

2.В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через точку B проведена прямая, параллельная стороне CD и пересекающая диагональ AC в точке P, а через точку C – прямая, параллельная стороне AB и пересекающая диагональ BD в точке Q. Доказать, что прямая PQ параллельна основаниям трапеции.

3. Пусть точка P_2 изогонально сопряжена точке P_1 относительно треугольника ABC. Из этих точек опустили перпендикуляры P_1A_1, P_1B_1, P_1C_1; P_2A_2, P_2B_2, P_2C_2 на стороны BC, CA, AB соответственно. Докажите, что точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной окружности.

4. На плоскости даны две прямые l_1 и l_2, пересекающиеся в точке A, а также точка B. Проводятся всевозможные пары прямых, проходящих через B и пересекающие l_1 и l_2, и отмечаются точки пересечения диагоналей получающихся четырехугольников. Докажите, что все эти точки лежат на одной прямой, проходящей через точку A.

5. На листе бумаги нарисован правильный треугольник со стороной 2003. Параллельно его сторонам проведены прямые, разбивающие его на 2003^2 правильных треугольничков со стороной 1. Федя и Саша ходят по очереди. Каждый своим ходом обводит фломастером замкнутую несамопересекающуюся ломаную, проходящую по сторонам единичных треугольничков и являющуюся границей выпуклого многоугольника. При этом различные ломаные не должны иметь общих точек. Начинает Федя, проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

6. Маньяк Вася по одной перерезает веревочки волейбольной сетки, имеющей вид прямоугольника $m \times n$. Какое наибольшее число веревочек может он разрезать до того, как сетка распадется на куски?