**Задачи С.-Петербургской летней школы 2008 г., старшая группа В**
**Вступительная олимпиада, 7 августа 2008 г.**

1. В прямоугольнике $6 \times 7$ закрашены 25 клеток. Докажите, что в некотором квадрате $2 \times 2$ закрашены не менее 3 клеток.

2. Какое наибольшее количество натуральных чисел может стоять в ряд, если сумма любых 17 чисел подряд четна, а любых 18 чисел подряд – нечетна ?

3. При каких натуральных $n$ число $2^n + 3^n + 4^n$ является квадратом?

4. Точка $D$ – середина стороны $AC$ треугольника $ABC$, точка $F$ лежит на стороне $BC$. $AF$ и $BD$ пересекаются в точке $E$ и $AE = BC$. Докажите, что $BF = EF$.

5. Найдите сумму $\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{2}{xy+1}$, если $x \neq y$, и известно, что сумма первых двух слагаемых равна третьему.

**Вывод**

6. В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен $120°$. Докажите, что основания биссектрис $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ образуют прямоугольный треугольник.

7. На шахматной доске стоят несколько пешек. Докажите, что найдется "крест", в котором стоит нечетное число пешек. (Крест – объединение одной вертикали и одной горизонтали).

8. В стране Далекой 101 город. Некоторые города соединены дорогами с односторонним движением, при этом два города соединены не более чем одной дорогой. Из каждого города выходят ровно 40 дорог, и в каждый город входят ровно 40 дорог. Докажите, что из любого города в любой можно добраться, проехав не более, чем по трем дорогам.

**Для решившего все**

9. Докажите неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2+d^2+a^2}} + \frac{c}{\sqrt{d^2+a^2+b^2}} + \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \geqslant 2$$

при $a, b, c, d > 0$.

**Добавка 1**

1 (ол-6). В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен $120°$. Докажите, что основания биссектрис $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ образуют прямоугольный треугольник.

2 (ол-7). На шахматной доске стоят несколько пешек. Докажите, что найдется "крест", в котором стоит нечетное число пешек. (Под крестом понимается объединение вертикали и горизонтали.)

3 (ол-8). В стране Далекой 101 город. Некоторые города соединены дорогами с односторонним движением, при этом два города соединены не более чем одной дорогой. Из каждого города выходят ровно 40 дорог, и в каждый город входят ровно 40 дорог. Докажите, что из любого города в любой можно добраться, проехав не более, чем по трем дорогам.

4. Можно ли так расставить по кругу все целые числа от $-7$ до $7$ (включая нуль), чтобы у каждого числа произведение двух его соседей было неотрицательным?

5. Три двузначных числа числа таковы, что сумма любых двух из них равна числу, отличающемуся от третьего лишь порядком цифр. Какой может быть сумма этих трех чисел?

6. Дано натуральное число $N$ и бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел. Известно, что никакой член прогрессии не взаимно прост с $N$. Докажите, что а) разность прогрессии не взаимно проста с $N$;  б) существует натуральное число, большее 1, на которое делятся $N$ и все члены прогрессии.

7. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята точка $O$. Докажите, что выполнено хотя бы одно из неравенств $OA < AB$, $OB < BC$, $OC < CD$, $OD < DA$.

**Добавка 2**

8. Стороны треугольника $T$ параллельны медианам треугольника $T_1$. Докажите, что медианы треугольника $T$ параллельны сторонам треугольника $T_1$.

9. В каком месте следует построить мост $MN$ через реку, разделяющую деревни $A$ и $B$, чтобы путь $AMNB$ из $A$ в $B$ был кратчайшим? (Берега реки считаются параллельными, мост перпендикулярен берегам.)

10. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел $a, b$ таких, что

$$a^8 + b^4 + 1 \;\vdots\; ab.$$

11. Для положительных чисел $a$, $b$, $c$ докажите неравенство

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geqslant 6.$$

12.Докажите, что

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

13. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} > 1$$

для положительных чисел $a$, $b$, $c$, $d$.

14. Для неотрицательных чисел $a$, $b$, $c$, $d$ докажите неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+d^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{d^2+a^2+b^2}}+\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\geqslant 2.$$

## Добавка 3

15. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ провели два отрезка: один – между серединами сторон $AB$ и $CD$, другой – между серединами $BC$ и $DE$. Пусть $P$ и $Q$ – середины этих отрезков. Докажите, что отрезок $PQ$ параллелен отрезку $AE$ и имеет вчетверо меньшую длину.

16. Точка $O$ лежит внутри треугольника $ABC$. Поместим в точки $A$, $B$ и $C$ массы, численно равные площадям $S_{OBC}$, $S_{OAC}$ и $S_{OAB}$ соответственно. Докажите, что центр масс совпадает с $O$.

17. Докажите, что точка пересечения средних линий выпуклого 4-угольника совпадает с серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей.

18. Докажите, что если у многоугольника есть несколько осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

19. Даны две точки $A$, $B$ и число $k>0$. Найдите геометрическое место точек $M$, для которых $\frac{AM}{BM}=k$.

20. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы точного квадрата и простого числа.

21. Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – положительные числа $n\geqslant 2$ и $S$ – их сумма, то

$$\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{S-a_n}\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

22. а) Найдите $\max\limits_{x\geqslant 0}(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2$.

б) Найдите $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} x(1-x)^{2008}$.

в) Найдите $\min\limits_{x>0} x^2+\frac{1}{x^3}$.

## Добавка 4

23. На плоскости проведена окружность радиуса 1 с центром $O$. Две соседние вершины квадрата лежат на этой окружности. На каком наибольшем расстоянии от точки $O$ могут лежать две другие его вершины?

24. Окружность пересекает стороны треугольника в точках $A_1$ и $A_2$, $B_1$ и $B_2$, $C_1$ и $C_2$. Докажите, что если перпендикуляры к сторонам треугольника, восставленные в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры к сторонам треугольника, восставленные в точках $A_2$, $B_2$, $C_2$, пересекаются в одной точке.

25. Докажите, что существует 100-значное число, записываемое только единицами и двойками и делящееся на $2^{100}$.

26. Натуральные числа $a$ и $k$ таковы, что $(a-1)a(a+1)$ делится на $a^2+k$. Докажите, что $k\geqslant a$.

27. $CL$ – биссектриса треугольника $ABC$, $AC<BC$. На прямой, параллельной $CL$ и проходящей через $B$, выбрана такая точка $M$, что $LM=LB$. На отрезке $CM$ выбрана такая точка $K$, что отрезок $AK$ делится прямой $CL$ пополам. Докажите, что $\angle CAK=\angle ABC$.

28. а) Пусть $a_1>a_2$, $b_1>b_2$. Докажите, что $a_1b_1+a_2b_2>a_1b_2+a_2b_1$.

б)Пусть $a_1>a_2>\ldots>a_n$, $b_1>b_2>\ldots>b_n$ и $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ – перестановка чисел от 1 до $n$. Докажите, что

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1\leqslant a_1b_{i_1}+a_2b_{i_2}+\ldots+a_nb_{i_n}\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n.$$

29.Сумма неотрицательных чисел $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_{25}$ равна 1. Найдите наибольшее значение выражения

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{24}x_{25}.$$

30. Наглый Алеша решает не менее одной задачи в день и не более 12 задач за любые 7 дней подряд. Докажите, что в течение трех недель найдутся несколько дней подряд, за которые Алеша решил ровно 20 задач.

## Добавка 5

31. (**Неравенство Чебышева**). Пусть $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$, $b_1\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant b_n$. Докажите, что

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\leqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}.$$

32. Поле имеет вид клетчатого квадрата $10\times 10$. Девять клеток заросли бурьяном. Если у клетки есть хотя бы два заросшие бурьяном соседа (по стороне), то она сама может зарасти бурьяном. Докажите, что все поле не сможет покрыться бурьяном.

33. (**Игра “щелк”**). а) Вася и Петя играют в такую игру. 100 пирожных уложены в виде квадрата $10\times 10$. Каждый игрок своим ходом выбирает одно пирожное и съедает вместе с этим пирожным все пирожные, лежащие правее, выше или и правее, и выше его. В левом нижнем пирожном – цианистый калий. Начинает Вася. Кому суждена долгая жизнь?

б) Тот же вопрос для прямоугольника $100\times 200$.

34. Отрезок покрыт несколькими содержащимися в нем отрезками. Докажите, что левые половины этих отрезков покрывают не менее половины длины исходного отрезка.

35. Правильный $(2n-1)$-угольник разбит попарно непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что среди них найдется остроугольный.

36. Дан остроугольный треугольник $ABC$. $B_1, C_1$ – основания высот из вершин $B, C$ соответственно. Точка $D$ – основание перпендикуляра из $B_1$ на $AB$, $E$ – точка пересечения перпендикуляра, опущенного из точки $D$ на сторону $BC$, с отрезком $BB_1$. Докажите, что прямая $EC_1$ параллельна $AC$.

37. Дано 25-значное число без девяток в десятичной записи. Докажите, что можно увеличить на 1 две его одинаковые цифры так, чтобы полученное число не делилось на 7.

**Добавка 6**

38. а) Докажите, что движение, изменяющее ориентацию плоскости, однозначно задается образами двух точек.

б) Докажите, что любое движение, изменяющее ориентацию плоскости, можно представить как композицию осевой симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси симметрии. (Такая композиция называется *скользящей симметрией*).

39. На сторонах произвольного выпуклого четырехугольника внешним образом построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны по длине и перпендикулярны.

40. Дан треугольник $ABC$. На сторонах $AB$, $AC$ и $BC$ выбраны точки $D$, $E$ и $F$ соответственно так, что $BF = 2CF$, $CE = 2AE$ и $\angle DEF = \angle 90°$. Докажите, что $\angle ADE = \angle EDF$.

41. Для $a, b, c > 0$ докажите неравенство $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3$.

42. Докажите, что для любых положительных чисел $x$, $y$ и $z$ выполнено неравенство:

$$\sqrt[2]{x + \sqrt[3]{y + \sqrt[4]{z}}} \geqslant \sqrt[32]{xyz}\,.$$

43. Докажите, что для любого натурального $n$ число $3^{2^n} - 1$ а) делится на $2^{n+2}$ б) не делится на $2^{n+3}$.

44. По окружности выписано 100 целых чисел, сумма которых равна 1. Цепочкой назовем несколько чисел, стоящих подряд. Найдите количество цепочек, сумма чисел в которых положительна.

**Добавка 7**

45. Точка $M$ лежит на диаметре $AB$ окружности. Хорда $CD$ проходит через $M$ и пересекает $AB$ под углом $45°$. Докажите, что сумма $CM^2 + DM^2$ не зависит от выбора точки $M$.

46. Четырехугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что их центры масс образуют параллелограмм.

47. Докажите неравенство о среднем геометрическом и среднем гармоническом

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

48. Докажите неравенство

$$a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c) \leqslant 3abc$$

а) если $a, b, c$ – стороны треугольника;

б) для произвольных положительных чисел $a$, $b$, $c$.

49. Докажите, что для произвольных положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ выполняется неравенство

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} \leqslant \frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \ldots + \frac{a_9^2}{a_{10}} + \frac{a_{10}^2}{a_1}.$$

50. Дана бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из различных натуральных чисел. Докажите, что в ней есть хотя бы одно составное число.

51. Докажите, что все числа вида 1010101...0101, кроме 101 – составные.

52. Клетчатый прямоугольник разрезали на квадратики $2 \times 2$ и прямоугольники $1 \times 4$. Один квадратик потеряли и заменили его на прямоугольник $1 \times 4$. Докажите, что теперь нельзя сложить исходный прямоугольник.

**Добавка 8**

53. Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается стороны $AC$ в точке $D$, $DM$ – ее диаметр. Прямая $BM$ пересекает сторону $AC$ в точке $K$. Докажите, что $AK = DC$.

54. На окружности даны точки $A, B, C, D$ в указанном порядке. $M$ – середина дуги $AB$. Обозначим точки пересечения хорд $MC$ и $MD$ с хордой $AB$ через $E$ и $K$. Докажите, что $KECD$ – вписанный четырехугольник.

55. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$; $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1/2$. Докажите, что

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdots\frac{1-x_n}{1+x_n} \geqslant \frac{1}{3}.$$

56. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске а) 8; б) 6 ладей так, чтобы они не били друг друга?

57. Дан клетчатый прямоугольник. Докажите, что количество способов разрезать его на уголки из трех клеток – четно.

58. Последовательность чисел Фибоначчи $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ задается правилом: $\Phi_1 = \Phi_2 = 1$, каждый следующий член равен сумме двух предыдущих ($\Phi_{n+1} = \Phi_n + \Phi_{n-1}$ при всех $n \geqslant 2$). Докажите, что любые два последовательных числа Фибоначчи взаимно просты.

59. Докажите, что $(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{(m,n)} - 1$ для натуральных $m$ и $n$.

## Добавка 9

60. Дан треугольник $ABC$, все углы которого меньше $120°$.

а) На сторонах $AB$, $BC$, $AC$ внешним образом посторонЫ правильные треугольники $A_1BC$, $AB_1C$, $ABC_1$. Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

б) Докажите, что отрезки $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке $T$, причем

$$\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°.$$

в) Докажите, что сумма расстояний от $A, B, C$ до точки $T$ меньше, чем сумма расстояний до любой другой точки внутри треугольника.

61. Точки $D$, $E$ и $F$ выбраны на сторонах $AC$, $AB$ и $BC$ равнобедренного треугольника $ABC$ ($AB = BC$) так, что $DE = DF$ и $AE + FC = AC$. Докажите, что $\angle BAC = \angle FDE$.

62. Докажите, что шахматный конь не может обойти доску $4 \times n$, побывав в каждой клетке ровно по одному разу, и вернуться в исходную точку.

63. В селе Ивановском живут больше 100 человек. Житель села называется общительным, если у него не менее 100 знакомых среди односельчан. Докажите, что в Ивановском найдутся либо два знакомых между собой общительных жителя, либо два незнакомых между собой необщительных жителя.

64. В государстве имеют хождение монеты в $a$ и $b$ золотых, где $a$ и $b$ – взаимно простые натуральные числа. а) Докажите, что такими монетами можно набрать любую сумму, начиная с $2ab$ золотых. б) Найдите наибольшее число золотых, которое нельзя набрать такими монетами.

65. Докажите, что для чисел Фибоначчи верно

а) $\Phi_{m+n} = \Phi_n \Phi_{m+1} + \Phi_{n-1} \Phi_m$;

б) $(\Phi_m, \Phi_n) = \Phi_{(m,n)}$.

66. Решите в целых числах уравнение $x^2 - y^2 = 9$.

## Добавка 10

67. а) Дана окружность и точка $A$ внутри нее. Через $A$ проведена хорда $XY$. Докажите, что произведение $AX \cdot AY$ не зависит от выбора этой хорды (если окружность и точка $A$ зафиксированы).

б) Дана окружность и точка $A$ вне ее. Через $A$ проведена прямая, пересекающая окружность в точках $X$ и $Y$. Докажите, что произведение $AX \cdot AY$ не зависит от выбора прямой и равно квадрату длины касательной, проведенной к окружности из $A$.

**Определение.** *Степень точки $A$ относительно окружности $S$* – это величина, определяемая следующим образом: если $A$ лежит вне $S$, то степень равна $AX \cdot AY$, где $XY$ – произвольная секущая, проходящая через $A$; если $A$ лежит внутри $S$, то степень отрицательна и равна $-AX \cdot AY$, где $XY$ – произвольная хорда, проходящая через $A$; если же $A$ лежит на $S$, то степень равна 0.

68. а) Докажите, что степень точки $A$ относительно окружности равна $d^2 - r^2$, где $r$ – радиус окружности, $d$ – расстояние от ее центра до $A$.

б) Даны две окружности $S_1$ и $S_2$ с разными центрами. Докажите, что геометрическое место точек $X$, таких, что степень $X$ относительно $S_1$ равна степени $X$ относительно $S_2$ – это прямая, перпендикулярная отрезку, соединяющему центры окружностей.

69. Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается сторон $AB, BC, AC$ в точках $C_1, A_1, B_1$ соответственно. Докажите, что отрезки $AA_1, BB_1, CC_1$ пересекаются в одной точке.

70. В выпуклом $n$-угольнике проведены все диагонали, причем никакие три не пересекаются в одной точке. Найдите

а) количество точек пересечения диагоналей;

б) количество частей, на которые разбит $n$-угольник.

71. В роте из 109 солдат каждый день трое выходят в наряд. Докажите, что можно составить такой график нарядов, что через некоторое время любые два солдата побывают вместе ровно в трех нарядах.

72. Докажите, что

а) для любого простого $p$ числа $C_p^1, \ldots, C_p^{p-1}$ делятся на $p$;

б) для любых натуральных $a, b$ $(a+b)^p \equiv (a^p + b^p) \pmod p$;

в) докажите малую теорему Ферма индукцией по $a$.

73. Докажите, что при любых натуральных $a, n$ число $a^{2n+1} + (a-1)^{n+2}$ делится на $a^2 - a + 1$.

## Математический бой, 19 августа 2008 г.

1. Шахматная фигура *полуферзь* ходит и бьет на любое число клеток по вертикали, горизонтали и диагонали, но не любой, как обычный ферзь, а только параллельно той, которая идет слева-снизу вправо-вверх. Требуется

поставить на доску $50 \times 50$ несколько полуферзей так, чтобы они били все незанятые клетки доски. Каким наименьшим числом полуферзей можно обойтись?

2. Даны натуральные числа $a$ и $b$, большие 1. Докажите, что существует лишь конечное количество таких натуральных чисел $k$, что $k^a + a$ делится на $k + b$.

3. На прямой отмечено 100 различных точек. Расстояние между крайними равно 1. Рассматриваются всевозможные отрезки с концами в отмеченных точках. Какое наибольшее число из них может быть длиннее 0,1?

4. В стране 1000 городов и первоначально нет ни одной дороги. Две строительные компании строят дороги по очереди. За один ход первая компания может построить 1 дорогу с односторонним движением, а вторая компания — 2 дороги. (Любая дорога соединяет два города в одном из направлений. Между двумя городами нельзя проводить две дороги в одном направлении, но можно провести две дороги разного направления.) Выигрывает компания, после хода которой из любого города можно будет проехать в любой другой. Какая из двух компаний сможет обеспечить себе победу?

5. На плоскости дано сто одинаковых кругов, окружности которых имеют общую точку. Докажите, что можно выбрать пять из этих кругов, которые покрывают центры всех ста кругов. (Круг покрывает все точки внутри себя и на своей границе.)

6. Положительное число а таково, что $a^4 = a + 1$. Докажите, что $a^{10} < a + 7$.

7. Дано натуральное $n > 2$. Рассмотрим все пары взаимно простых натуральных чисел $a$ и $b$, для которых выполняется условие $a < b \leqslant n < a + b$. Докажите, что сумма чисел $\frac{1}{ab}$, взятая по всем таким парам, равна $\frac{1}{2}$.

8. На двух горизонтальных параллельных прямых выбраны по 180 точек: $A_1, A_2, \ldots, A_{180}$ и $B_1, B_2, \ldots, B_{180}$ соответственно (точки нумеруются слева направо). При этом $1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{179}A_{180}$ и $2 = B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots = B_{179}B_{180}$. Докажите неравенство

$$180^\circ > \angle A_1B_1A_2 + \angle A_2B_2A_3 + \angle A_3B_3A_4 + \ldots + \angle A_{179}B_{179}A_{180}.$$

**Добавка 11, задачи с матбоя**

74. Шахматная фигура *полуферзь* ходит и бьет на любое число клеток по вертикали, горизонтали и диагонали, но не любой, как обычный ферзь, а только параллельно той, которая идет слева-снизу вправо-вверх. Требуется поставить на доску $50 \times 50$ несколько полуферзей так, чтобы они били все незанятые клетки доски. Каким наименьшим числом полуферзей можно обойтись?

75. Даны натуральные числа $a$ и $b$, большие 1. Докажите, что существует лишь конечное количество таких натуральных чисел $k$, что $k^a + a$ делится на $k + b$.

76. В стране 1000 городов и первоначально нет ни одной дороги. Две строительные компании строят дороги по очереди. За один ход первая компания может построить 1 дорогу с односторонним движением, а вторая компания – 2 дороги. (Любая дорога соединяет два города в одном из направлений. Между двумя городами нельзя проводить две дороги в одном направлении, но можно провести две дороги разного направления.) Выигрывает компания, после хода которой из любого города можно будет проехать в любой другой. Какая из двух компаний сможет обеспечить себе победу?

**Добавка 12**

77. К окружностям $S_1$ и $S_2$ проведены две общие внешние касательные $\ell_1$ и $\ell_2$, причем $\ell_1$ касается $S_1$ в точке $A$, а $\ell_2$ касается $S_2$ в точке $B$. Докажите, что $S_1$ и $S_2$ высекают на прямой $AB$ равные хорды.

78. В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$ и $CC_1$. На высоте $AA_1$ выбрана точка $D$ такая, что $A_1D = C_1D$. Точка $E$ – середина стороны $AC$. Докажите, что точки $A, C_1, D$ и $E$ лежат на одной окружности.

79. Пусть $m$ и $n$ – натуральные числа. Докажите, что $\sqrt[m+n]{m^n n^m} \leqslant \frac{m+n}{2}$.

80. Докажите, что для любых положительных чисел $a, b, c, d$ верно неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2.$$

81. Докажите для положительных $a$, $b$, $c$, $d$ неравенство

$$\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{abcd}.$$

82. Докажите, что если $(a, 561) = 1$, то $a^{560} - 1 \mathrel{\vdots} 561$.

83. Есть ожерелье из $p$ бусинок, где $p$ – простое число. Сколько существует его различных раскрасок в $a$ цветов? (Раскраски, отличающиеся поворотом ожерелья, считаются одинаковыми.)

84. Для любых натуральных $n$ и $a > 1$ докажите, что $\phi(a^n - 1) \mathrel{\vdots} n$.

**Добавка 13**

85. На сторонах $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$ взяты точки $A_1$ и $B_1$; $\ell$ – прямая, проходящая через общие точки окружностей с диаметрами $AA_1$ и $BB_1$. Докажите, что

а) прямая $\ell$ проходит через точку пересечения высот треугольника $ABC$;

б) прямая $\ell$ тогда и только тогда проходит через точку $C$, когда $AB_1 : AC = BA_1 : BC$.

86. Пусть $P$ – середина стороны $AB$ выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если площадь треугольника $PCD$ равна половине площади четырхугольника $ABCD$, то $BC || AD$.

87. В стране 100 городов, любые два из которых соединены дорогой. Соловей-Разбойник со своими соловьятами перекрыл 98 дорог. Докажите, что после этого все равно можно проехать из любого города в любой другой.

88. В стране каждые два города соединены дорогой с односторонним движением.

а) Докажите, что можно проехать по всем городам, побывав в каждом городе ровно по одному разу.

б) Докажите, что есть город, из которого можно доехать до любого другого, заезжая не более чем в один промежуточный город.

89. Степень любой вершины графа не превосходит $d$. Докажите, что а) его вершины можно раскрасить в $d+1$ цвет так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром;

б) его вершины можно покрасить в $d^2-d+1$ цветов так, чтобы у любой вершины все соседи были разного цвета.

90. Докажите, что для любого $n$ существуют $n$ натуральных чисел подряд, каждое из которых а) составное; б) делится на квадрат какого-то простого числа.

91. Пусть $p$ – простое число. На окружности отмечены $p$ точек, разбивающих ее на равные дуги. Сколькими способами можно провести замкнутую ориентированную $p$–звенную ломаную с концами в отмеченных точках? (Ломаные, совмещающиеся поворотами, считаются одинаковыми.)

92. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида а) $4k+3$; б) $4k+1$, где $k$ – целое.

## Добавка 14

93. Внутри выпуклого многоугольника расположено несколько попарно непересекающихся кругов различных радиусов. Докажите, что многоугольник можно разрезать на маленькие многоугольники так, чтобы все они были выпуклыми и в каждом из них содержался ровно один из данных кругов.

94. На плоскости даны 25 точек *общего положения* (это означает, что никакие три точки не лежат на одной прямой). Докажите, что а) можно провести прямую так, чтобы она проходила через одну из данных точек, и по каждую сторону от нее лежало ровно 12 точек; б) такую прямую можно провести через любую из данных точек.

95. На планете 10000 городов, среди которых есть столицы государств. Некоторые города связаны дорогами так, что любая дорога соединяет ровно два города, и от любого города до любого другого можно добраться по дорогам. При этом, чтобы попасть из одной столицы в другую, нужно проехать не менее 200 дорог. Докажите, что на планете меньше 100 столиц.

96. Докажите, что для любых натуральных $n$ и $k$ верно $(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k) \vdots k!$.

97. а) Для натуральных $a$ и $n$ рассмотрим остатки чисел $0, a, 2a, \ldots, [\sqrt{n}]a$ от деления на $n$. Докажите, что среди них либо найдутся два остатка, отстоящих друг от друга не более, чем на $\sqrt{n}$, либо остаток, не меньший, чем $n-\sqrt{n}$.

б) (*Лемма Туэ.*) Пусть $n>1$ – натуральное число, $a$ – целое число, взаимно простое с $n$. Докажите, что существуют такие натуральные $x \leqslant \sqrt{n}$ и $y \leqslant \sqrt{n}$, что $ay \equiv \pm x \pmod n$.

в) (*Рождественская теорема Ферма.*) Докажите, что любое простое число вида $p=4k+1$ представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел.

## Добавка 15

98. Для каждой вершины выпуклого четырехугольника нашли сумму расстояний до двух сторон, примыкающих к противоположной вершине (под расстоянием до стороны понимается расстояние до содержащей ее прямой). Оказалось, что все четыре полученные суммы равны. Докажите, что четырехугольник – параллелограмм.

99. Докажите, что основания внешних биссектрис неравнобедренного треугольника лежат на одной прямой.

**Неравенство Бернулли**. Пусть $x>-1$. Тогда при $a>1$ и при $a<0$ выполнено неравенство $(1+x)^a \geqslant 1+ax$, а при $0<a<1$ выполнено $(1+x)^a \leqslant 1+ax$. (Напоминание: если $m$ – целое число, не равное 0, $n$ – натуральное число и $k>0$, то $k^{\frac{m}{n}}$ определяется как $\sqrt[n]{k^m}$.)

100. Докажите неравенство Бернулли в случае

а) $x>0$, $a \in \mathbb{N}$;

$x$ – произвольное число, большее $-1$, и

б) $a \in \mathbb{N}$;

в) $a \in \mathbb{Z}$;

г) $a=\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m<n$;

д) $a=\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m>n$;

е) $a=\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

101. Дан треугольник $ABC$. $M$ – середина $BC$, $K$ – точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника в точках $B$ и $C$. Докажите, что прямые $AK$ и $AM$ симметричны относительно биссектрисы угла $A$.

102. В прямоугольной таблице стоят натуральные числа. Разрешается вычитать по 1 из всех чисел любого столбца или умножать на 2 все числа любой строки. Докажите, что можно получить таблицу из одних нулей.

103. а) Пусть $p$ – простое число, $p>3$. Какой остаток по модулю $p$ дает сумма всех квадратичных вычетов по модулю $p$?

б) Пусть $p$ – простое число. Какой остаток по модулю $p$ дает произведение всех квадратичных вычетов по модулю $p$?