Задачи С.-Петербургской летней школы 2008 г., старшая группа B
Вступительная олимпиада, 7 августа 2008 г.

1. Какое наибольшее количество натуральных чисел может стоять в ряд, если сумма любых 17 чисел подряд четна, а любых 18 чисел подряд – нечетна ?

2. Докажите, что при любых вещественных x, y, z выполняется неравенство

$$\sin x\cos y\sin z+\cos x\sin y\cos z\leqslant 1.$$

3. Точка D — середина стороны AC треугольника ABC, точка F лежит на стороне BC. Отрезки AF и BD пересекаются в точке E, и $AE = BC$. Докажите, что $BF = EF$.

4. На шахматной доске стоят несколько пешек. Докажите, что найдется "крест", в котором стоит нечетное число пешек. (Крестом мы называем объединение вертикали и горизонтали.)

5. В стране 2008 городов. Каждый город связан авиалиниями с некоторыми другими, причем для каждого города число исходящих из него авиалиний есть степень двойки $(1, 2, 4, 8, \dots)$. Для каждого города статистик подсчитал количество маршрутов из этого города в другие города, имеющих не больше одной пересадки. Докажите, что сумма всех полученных чисел не может быть равна 2000000.

Выводные задачи

6. Окружность проходит через вершины A и C остроугольного треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC в точках D и E. Точки D_1 и E_1 симметричны точкам D и E соответственно относительно основания высоты треугольника, опущенной на сторону AC. Прямые CD_1 и AE_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $\angle AKC = \angle ABC$.

7. Найдите все пары простых чисел p и q такие, что $p^2 - p + 1 = q^3$.

8. На острове живут 90 рыцарей и 10 нормальных людей. Рыцари всегда говорят правду, а нормальные люди могут говорить как правду, так и ложь. Разрешается выбрать любое множество жителей острова и спросить любого аборигена, есть ли в этом множестве нормальные люди. Докажите, что за 10 вопросов можно гарантированно найти хотя бы одного рыцаря.

Серия 1b, разминочная

1 (Ол-6). Окружность проходит через вершины A и C остроугольного треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC в точках D и E. Точки D_1 и E_1 симметричны точкам D и E соответственно относительно основания высоты треугольника, опущенной на сторону AC. Прямые CD_1 и AE_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $\angle AKC = \angle ABC$.

2 (Ол-7). Найдите все пары простых чисел p и q такие, что $p^2 - p + 1 = q^3$.

3 (Ол-8). На острове живут 90 рыцарей и 10 нормальных людей. Рыцари всегда говорят правду, а нормальные люди могут говорить как правду, так и ложь. Разрешается выбрать любое множество жителей острова и спросить любого аборигена, есть ли в этом множестве нормальные люди. Докажите, что за 10 вопросов можно гарантированно найти хотя бы одного рыцаря.

4. Даны натуральное число k и многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что при любом целом x число $P(Q(x)) - x$ делится на k. Докажите, что число $Q(P(x)) - x$ тоже делится на k при любом целом x.

5. На сторонах AB, BC и AC остроугольного треугольника ABC выбраны точки C', A' и B' соответственно так, что треугольники ABC и $A'B'C'$ соответственно подобны. Докажите, что ортоцентр треугольника $A'B'C'$ совпадает с центром описанной окружности треугольника ABC.

6. На прямой даны два отрезка. Найдите геометрическое место точек, из которых они видны под равными углами.

7. а) Докажите, что $2x^3 + y^3 \geqslant 3x^2y$ для всех $x, y \geqslant 0$.

б) Какое наименьшее значение принимает выражение $\frac{x^6+y^6+z^6}{x^3y^2z}$ при $x, y, z > 0$?

8. Докажите, что многочлен вида $ax^{10} - ax^9 + bx^8 + cx^7 + \ldots + kx - \frac{k}{100}$ не может иметь 10 различных положительных корней.

9. Рассмотрим мнрожество всех ограниченных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ со следующим расстоянием: $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|\}$. Докажите, что это метрическое пространство.

Серия 2b, многочленно-подобная

0. (*Построение центра подобия*) Даны точки A и B и их образы при подобии первого (второго) рода A_1 и B_1. Строим на отрезке AB квадрат $ABCD$ и на отрезке A_1B_1 точно также (противоположно) ориентированный квадрат $A_1B_1C_1D_1$. Точки P, Q, R, S – точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CD и C_1D_1, AD и A_1D_1 соответственно. Прямые PR и QS пересекаются в точке O. Докажите, что O – центр заданного подобия.

1. а) (*Задача Фаньяно*) Впишите в данный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра.

б) $ABCD$ – вписанный четырехугольник. Впишите в него четырехугольник наименьшего периметра. Докажите, что данная задача задача имеет бесконечно много решений.

в) Дан $(2n + 1)$-угольник. Впишите в него $(2n + 1)$-угольник наименьшего периметра.

2. а) Из точки M к данной окружности проведены две секущие, пересекающие ее соответственно в точках A, B и C, D. Опишите все подобия второго рода, отображающие отрезок AB на отрезок CD.

б) Даны две неравные окружности с разными центрами. Опишите все подобия, отражающие одну из них на другую.

3. Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке M. Биссектриса угла AMB пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AKM и BKM, перпендикулярна биссектрисе угла AKB.

4. Дан параллелограмм $ABCD$. Произвольная прямая пересекает лучи AB, AC, AD соответственно в точках P, Q, R. Докажите, что $\frac{AB}{AP}+\frac{AD}{AR}=\frac{AC}{AQ}$.

5. Пусть P – многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что уравнения $P(x)=1$, $P(x)=2$ имеют целые корни. Может ли уравнение $P(x)=2$ иметь два целых корня?

6. Пусть P – многочлен с целыми коэффициенитами. Известно, что при каждом $n=1,2,\ldots,2008$ значение $P(n)$ – трехзначное натуральное число. Докажите, что P не имеет целых корней.

7. Многочлен f шестой степени удовлетворяет равенствам $f(29)=f(-29)$, $f(239)=f(-239)$, $f'(0)=0$. Докажите, что f – четная функция.

8. Найдите все многочлены P, при всех вещественных x удовлетворяющие условию $(x-1)P(x+1)\equiv(x+2)P(x)$.

Серия 3b, содержащая важные идеи

0. Через точку X провели прямые, параллельные сторонам AC и BC треугольника ABC, пересекающие сторону ABв точках K и L соответственно. Докажите, что барицентрические координаты точки B равны $(BL : AK : LK)$.

1. На сторонах AD и DC выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки P и Q так, что $\angle ABP=\angle CBQ$. Отрезки AQ и CP пересекаются в точке E. Докажите, что $\angle ABE=\angle CBD$.

2. Дан треугольник ABC. Через точку X, лежащую внутри него, проводится отрезок c_X, параллельный AB, с концами на сторонах AC и BC, и отрезок b_X, параллельный AC, с концами на сторонах AB и CB. Докажите, что все точки X, для которых длины отрезков b_X и c_X равны, лежат на одной прямой.

3. AB – хорда окружности S. Окружности S_1 и S_2 касаются окружности S в точках P и Q соответственно и отрезка AB в точке K. Оказалось, что $\angle PBA=\angle QBA$. Докажите, что AB – диаметр окружности S.

4. Различные простые числа p и q таковы, что при некотором целом $k>2$ число $p^2+kpq+q^2$ – точный квадрат. Докажите, что $(p-2)(q-2)\leqslant k+2$.

5. Пусть p,q — простые числа, $q>5$. Докажите, что если число 2^p+3^p кратно q, то $q>p$.

6. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $P(x)>0$ при $x\geqslant 0$. Последовательность a_0, a_1, a_2, ... задана соотношениями $a_0=0$ и $a_n=P(a_{n-1})$ при $n\geqslant 1$. Докажите, что

а) $a_{(n,m)}=(a_n,a_m)$;

б) $a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+k} \,\vdots\, a_1a_2\ldots a_k$ для любых натуральных n,k.

7. а) Пусть f – многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что уравнение $f(x)=x$ не имеет решений в целых числах. Докажите, что уравнение $f(f(f(x)))=x$ тоже не имеет решений в целых числах.

б) Пусть f – многочлен с вещественными коэффициентами. Известно, что уравнение $f(x)=x$ не имеет решений в вещественных числах. Докажите, что уравнение $f(f(f(x)))=x$ тоже не имеет решений в вещественных числах.

8. Пусть $a,b,c,d>0$. Докажите неравенство

а) $\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}\geqslant\frac{4}{3}$;

б) $\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geqslant\frac{2}{3}$.

Серия 4b, удлиненная из-за выходного

0. *Окружность Аполлония.* Даны две точки A и B. Докажите, что геометрическим местом точек X, для которых $AX:BX=k$, где k – константа, не равная 1, является окружность.

1. а) Пусть f – непрерывная функция, причем $f(f(f(x)))=x$. Докажите, что $f(x)=x$ при всех вещественных x.

б) верно ли это утверждение для разрывной функции?

в) Пусть непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют тождеству $f(g(x))\equiv g(f(x))$ при всех вещественных x. Докажите, что если уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет корней, то их не имеет и уравнение $f(f(x))=g(g(x))$

2. Пусть A_1, B_1 и C_1 – проекции точки Лемуана K на стороны треугольника ABC.

а) Докажите, что K –центроид треугольника $A_1B_1C_1$.

б) Докажите, что медиана AM треугольника ABC перпендикулярна прямой B_1C_1.

3. *(О трижды перспективных треугольниках)* Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O, прямые AA_1, BC_1 и B_1C пересекаются в точке O_1, прямые AC_1, A_1C и BB_1 пересекаются в точке O_2. Докажите, что прямые AB_1, A_1B и CC_1 пересекаются в одной точке O_3.

4. На основании AC треугольника ABC взяты точки M и N так, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABM и CBN, равны. Докажите, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABN и CBM, также равны.

5. Докажите, что для любого многочлена $P(x)\neq x$ многочлен $Q_n(x)=P(P(P(\ldots(x))))-x$ (композиция берется n раз) делится на $Q_1(x)=P(x)-x$.

6. В n-элементном множестве выбрано 2^{n-1} различных подмножеств, любые три из которых имеют непустое пересечение. Докажите, что все эти подмножества имеют непустое пересечение.

7. Дано n различных натуральных чисел. На доску выписали все их попарные наибольшие общие делители и наименьшие общие кратные. Докажите, что среди выписанных чисел есть не менее n различных.

8. Пара различных натуральных чисел называется хорошей, если у них одинаковые наборы простых делителей. Докажите, что существует бесконечно много хороших пар чисел (m, n) для которых пара $(m+1, n+1)$ также является хорошей.

Серия 5b, геометрически-числовая

1. Доказать, что для любого натурального n сумма всех чисел, обратных произведениям нескольких различных натуральных чисел, каждое из которых не больше n, равна n.

2. Докажите, что $\{n\sqrt{2}\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}$ для любого натурального n.

3. Пусть $\{f_n\}$ – последовательность чисел (Фибоначчи), задаваемая равенствами $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что если многочлен $P(x)$ степени 1000 удовлетворяет условиям $P(k) = f_k$ при $k = 1002, 1003, \ldots, 2002$, то $P(2003) = f_{2003} - 1$.

4. Натуральное k таково, что число $p = 2^{2k} + 2^k + 1$ – простое. Докажите, что а) p является делителем числа $2^{2^k+1} - 1$; б) k — степень тройки.

5. M – некоторое множество простых чисел, в котором больше одного элемента. Известно, что для всякого конечного подмножества $N \subset M$ число $\left(\prod\limits_{k \in N} k\right) - 1$ имеет простые делители только из M. Докажите, что M совпадает с множеством всех простых чисел.

6. Прямые AK, BK и CK, где K – точка Лемуана треугольника ABC, пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что K – точка Лемуана треугольника $A_1B_1C_1$.

7. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке D, а продолжений сторон AB и AC в точках E и F. Пусть точка T – точка пересечения прямых BF и CE. Докажите, что точки A, D и T лежат на одной прямой.

8. Известно, что сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1. Докажите, что

а) $\frac{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)}{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)} \geqslant \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$;

б) $\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \geqslant (n-1)^n$.

Серия 6b, последовательная

1. Возрастающая последовательность натуральных чисел обладает следующими свойствами: $a_{2n} = a_n + n$ и если a_n простое, то и n – простое. Докажите, что $a_n = n$ для любого натурального n.

2. а) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что все члены этой последовательности – целые числа.

б) $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 9$, $x_{n+3} = 2x_{n+2} + 2x_{n+1} - x_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что все члены этой последовательности – точные квадраты.

3. а) Докажите, что если (a_0, b_0, c_0) – решение уравнения Маркова $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ в натуральных числах, то у этого уравнение имеется решение (a_1, b_0, c_0), где $a_1 \neq a_0$.

б) Докажите, что уравнение Маркова имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

с) Докажите, что уравнение $a^2 + b^2 + c^2 = kabc$ при $k \neq 1, 3$ не имеет решений в натуральных числах.

4. Треугольник ABC вписан в окружность S Докажите, что существет проективное перобразование P, которое переводит S в окружность, а треугольник ABC – в правильный.

5. Рассмотрим многочлен от двух переменных $P(x, y) = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant k} a_{ij} x^i y^j$. Известно, что для всех вещественных x, y верно $P(x, y) = P(x+1, y+1)$. Докажите, что $P(x, y) = Q(x - y)$, где Q –некоторый многочлен от одной переменной.

6. Дана окружность S и точка P вне нее. По окружности скользит хорда AB постоянной длины так, что меньшая из дуг, стягиваемых этой хордой, направлена от A к B по часовой стрелке. Точка M – середина хорды AB. Через B проводится прямая, параллельная PM, которая пересекает окружность в точках B и C. Докажите, что все такие прямые AC проходят через одну точку.

7. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки Q и P соответственно так, что точка пересечения отрезков BP и CQ лежит на биссектрисе AL угла A. При этом $\angle APQ = \angle ALB$. Докажите, что PQ – биссектриса угла APB.

8. Назовем лабиринтом шахматную доску 100×100, где между некоторыми полями вставлены перегородки, но так, что ладья может передвигаться по всей доске, не перепрыгивая через перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа край доски или перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Конечную последовательность таких команд назовем программой. Даны два лабиринта, в каждом стоит ладья. Докажите, что есть программа, выполнив которую, каждая ладья окажется в верхней правой клетке своего лабиринта.

Серия 7b, по мотивам прошедших и будущих ликбезов

1. $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 41$, $x_{n+3} = \frac{2008 + x_{n+2}x_{n+1}}{x_n}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что все члены этой последовательности – натуральные числа.

2. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, прямые AD и BC – в точке Q. Прямая PE пересекает BC в точке X, прямая QE пересекает AB в точке Y. Докажите, что отрезок XY проходит через точку пересечения симедиан треугольника ABC.

3. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана такая точка K, что $\angle AKC = 2\angle ABC$, и $AK/KC = (AB/BC)^2$. Точки A_1 и C_1 – середины сторон BC и AB. Докажите, что точка K лежит на описанной окружности треугольника A_1BC_1.

4. а) На железной дороге рельсы параллельны, а шпалы уложены перпендикулярно рельсам через равное расстояние. Художник, изображая на картине железную дорогу, изобразил рельсы двумя линиями, пересекающимися за горизонтом, а две шпалы - параллельными отрезками. Как правильно изобразить третью шпалу?

б) Можно ли отметить на плоскости 4016 различных точек и окрасить 2008 из них в синий цвет, а 2008 – в красный так, что если прямая проходит через две точки разных цветов, то на ней обязательно есть еще ровно одна окрашенная точка?

5. а) *(Евклид)* Докажите, что если $2^p - 1$ – простое число, то $2^{p-1}(2^p - 1)$ – совершенное число.

б) *(Эйлер)* Докажите, что если n – совершенное четное число, то существует такое простое число вида $2^p - 1$, что $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$

6. Докажите, что $3^n - 1$ не делится на $2^n - 1$ ни при каких натуральных $n > 1$.

7. Для вещественных чисел $x_1, x_2, \cdot, x_n$ $(n \geqslant 2)$ из промежутка $(0, 1]$ докажите неравенство $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \leqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}$.

8. Картинная галерея имеет форму невыпуклого многоугольника (стороны многоугольника – это стены галереи). Для любых трех точек A, B и C на стенах галереи найдется точка внутри нее, из которой видны и A, и B, и C. Докажите, что в галерее есть точка, из которой видна она вся.

Серия 8b, облегчённая на выходной

0. Решить сравнение $x^2 \equiv 91 \pmod{243}$.

1. Множество X состоит из n элементов. Для каждой упорядоченной пары двух подмножеств (возможно? совпадающих) множества X подсчитано число элементов в их пересечении, и полученные числа сложены. Докажите, что полученная сумма равна $n4^{n-1}$.

2. Пусть σ – перестановка на множестве $M = \{1, 2, \ldots, p-1\}$ (где $p > 2$ – простое число). Докажите, что для некоторых различных $i, j \in M$ выполняется сравнение $i\sigma(j) \equiv j\sigma(i) \pmod{p}$.

3. а) Пусть $m > 0$, $(a, m) = 1$, b – целое, x пробегает полную систему вычетов, по модулю m. Докажите, что $\sum\limits_x \left\{\frac{ax+b}{m}\right\} = \frac{1}{2}(m-1)$;

б) По-прежнему $m > 0$, $(a, m) = 1$, b – целое, а z пробегает приведенную систему вычетов по модулю m. Докажите, что $\sum\limits_z \left\{\frac{az}{m}\right\} = \frac{1}{2}\phi(m)$;

в) Пусть $n > 0$, $m > 1$ – натуральное и x пробегает все натуральные числа, большие 1 и не делящиеся на m-ю степень целого числа (x – числа, свободные от степени m). Докажите, что $\sum\limits_x \left[\sqrt[m]{\frac{n}{x}}\right] = [n]$.

4. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске размером $3n \times 3n$ так, чтобы каждая ладья находилась под боем не более чем одной другой?

5. Докажите, что простых чисел вида $p = 6k + 1$ бесконечно много.

6. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_1 > 0$ и $x_{n+1} = \frac{n}{x_1+x_2+\ldots+x_n}$. Докажите, что $x_{2008} \geqslant 1$.

7. *Построения при помощи одной линейки.*

а) Дана некоторая окружность. При помощи одной линейки постройте n-угольник, стороны которого проходят через данные n точек, а вершины лежат на данных n прямых.

б) При помощи одной линейки впишите в данную окружность n-угольник, стороны которых (или их продолжения) проходят через данные n точек.

8. Точка P находится вне окружности с центром O. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 проходят через точку P, причем ℓ_1 касается окружности в точке A, а ℓ_2 пересекает окружность в точках B и C. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке X. Докажите, что AX и PO перпендикулярны.

Серия 9b, числовая

0. Решите сравнение $31x^4 + 57x^3 + 96x + 191 \equiv 0 \pmod{225}$

1. Пусть a, b, c – натуральные числа. $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $a + b + c$. Докажите, что какие-то два из чисел a^3, b^3, c^3 дают одинаковые остатки при делении на $a + b + c$.

2. Для любых натуральных чисел $n > m$ докажите неравенство $[m, n] + [m + 1, n + 1] > \frac{2mn}{\sqrt{n-m}}$, где $[x, y]$ — наименьшее общее кратное чисел x и y.

3. Докажите, что для любого натурального числа a существует бесконечно много натуральных n, таких что число $a^{2^n} + 2^n$ – составное.

4. При $(a, m) = 1$ будем рассматривать символическую дробь $\frac{b}{a}$ по модулю m, обозначающую любое решение сравнения $ax \equiv b \pmod{m}$. Докажите, что для любого нечетного простого числа p верно $\frac{2^p-2}{p} \equiv 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{p-1} \pmod{p}$.

5. Пусть $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$. Докажите, что $\frac{x+y}{xy(4-xy)} + \frac{y+z}{yz(4-yz)} + \frac{z+x}{zx(4-zx)} \geqslant 2$.

6. Из точки A к данной окружности S проведены касательные AB и AC. На средней линии треугольника ABC, параллельной стороне BC, выбраны произвольные точки X и Y. Отрезки касательных из точек X и Y к S пересеклись в точке Z. Докажите, что четырехугольник $AXZY$ – описанный.

7. На клетчатой плоскости нарисован квадрат 11×11, внутри и на сторонах которого отмечены все узлы сетки. Отмеченные точки покрашены в три цвета. Доказать, что найдется прямоугольник со сторонами, идущими по линии сетки, все вершины которого окрашены в один и тот же цвет.

8. а) Рассматриваются всевозможные наборы из 100 неотрицательных целых чисел, расположенных в неубывающем порядке и не превосходящие 100, в которых сумма всех чисел делится на 10. Докажите. что ровно половина этих наборов заканчивается числом 100.

б) Непрерывная и строго монотонная функция $f:[0,1]\to[0,1]$ такова, что $f(0)=0$, $f(1)=1$. Докажите, что $f(\frac{1}{10})+f(\frac{2}{10})+\ldots+f(\frac{9}{10})+f^{-1}(\frac{1}{10})+f^{-1}(\frac{2}{10})+\ldots+f^{-1}(\frac{9}{10})<\frac{99}{10}$.

Математический бой, группа B, 19.08.08

1. Множество S состоит из $2n$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Отрезок, соединяющий две из этих точек, называется разделяющим, если по каждую сторону от содержащей его прямой находится ровно по $n-1$ точке. Оказалось, что в S есть ровно n разделяющих отрезков. Докажите, что любые два таких отрезка пересекаются по внутренней точке.

2. Сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n (n \geqslant 4)$ равна 1. Докажите, что

$$\frac{x_1}{x_2(x_1+x_2+x_3)}+\frac{x_2}{x_3(x_2+x_3+x_4)}+\ldots+\frac{x_n}{x_1(x_n+x_1+x_2)}\geqslant\frac{n^2}{3}$$

.

3. Внутри вписанного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ нашлась такая точка P, что $\angle PA_1A_2=\angle PA_2A_3=\ldots=\angle PA_nA_1$. Докажите, что внутри этого многоугольника найдется точка Q такая, что $\angle QA_2A_1=\angle QA_3A_2=\ldots=\angle QA_1A_n$.

4. Докажите, что для каждого натурального числа $n\geqslant 2008$, взаимно простого с 10, существует натуральное число, кратное n, не меняющееся, если записать его цифры от конца к началу и состоящее менее чем из $\frac{n}{4}$ цифр.

5. В вершинах правильного шестиугольника написаны шесть целых неотрицательных чисел с суммой 2005. Вдумчивый мальчик Боря может стереть число в любой вершине и написать вместо него модуль разности чисел в двух соседних вершинах. Докажите, что Боря может добиться того, чтобы во всех шести вершинах стояли нули.

6. Пусть $S_n=\{0,1,2,\ldots,4n-1\}$. Подмножество A множества S_n называется редким, если для любого $k=0,1,2,\ldots,n-1$ выполняются условия

$$|A\cap\{4k+1,4k+2,4k+3\}|\leqslant 1, |A\cap\{4k-2,4k-1,4k,4k+1,4k+2\}|\leqslant 2$$

. Докажите, что количество редких подмножеств равно $8\cdot 7^{n-1}$.

7. Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет условию $a_{n+3}=a_{n+2}(a_{n+1}+a_n)$ для $n\in\mathbb{N}$. Найдите a_7, если $a_6=8820$.

8. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Его диагонали пересекаются в точке E. Точка P внутри $ABCD$ такова, что $\angle PAB+\angle PCB=\angle PBC+\angle PDC=90^\circ$. Докажите, что точки P, E и O лежат на одной прямой.

9. Решите в натуральных числах x, y и $k>1$ уравнение $2^{2x+1}+2^{x+1}+1=y^k$.

10. Прямоугольную таблицу, в клетках которой стоят целые числа, назовем n-близкой, если в каждых двух клетках, соседних по стороне, стоят числа, отличающиеся не более, чем на n (n - натуральное число). Докажите, что каждая kn-близкая таблица является суммой k n-близких таблиц. (Сумма нескольких прямоугольных таблиц одинакового размера - это таблица, в каждой клетке которой стоит сумма чисел, стоящих в соответствующих клетках таблиц-слагаемых.)

Серия 10b, матбойно-ликбезная, из-за чего опять длинная, но с кучей простых задач

0. Каких чисел от 1 до 1000000 больше: тех, которые представляются в виде $2x^2-3y^2$ для некоторых натуральных x,y или тех, которые представляются в виде $10xy-x^2-y^2$ для некоторых натуральных x,y

1. (*Золотарёв*) Пусть p – нечетное простое число, $(a,p)=1$ и $\sigma: i\to ai \pmod p$ – перестановка полной системы вычетов по модулю p. Докажите, что $\operatorname{sgn}\ \sigma=\left(\frac{a}{p}\right)$.

2. Квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ с целыми коэффициентами таков, что для любого натурального m найдется натуральное x такое, что $f(x)$ делится на m. Докажите, что корни $f(x)$ рациональны.

3. Пусть $p\geqslant 5$ — простое число. Можно ли по кругу расставить числа от 1 до $p-1$ так, чтобы для любых трех последовательно стоящих чисел a,b,c число b^2-4ac делилось на p?

4. Пусть $a\in\mathbb{Z}$ и последовательность $\{x_n\}$ задана следующим образом: $x_1=a$, $x_n=a^n-\sum x_d$, где суммирование ведется по всем делителям числа n, меньшим n. Докажите, что a_n делится на n при любом n.

5. Множество S состоит из $2n$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Отрезок, соединяющий две из этих точек, называется разделяющим, если по каждую сторону от содержащей его прямой находится ровно по $n-1$ точке. Оказалось, что в S есть ровно n разделяющих отрезков. Докажите, что любые два таких отрезка пересекаются по внутренней точке.

6. Прямоугольную таблицу, в клетках которой стоят целые числа, назовем n-близкой, если в каждых двух клетках, соседних по стороне, стоят числа, отличающиеся не более, чем на n (n - натуральное число). Докажите, что каждая kn-близкая таблица является суммой k n-близких таблиц. (Сумма нескольких прямоугольных таблиц одинакового размера - это таблица, в каждой клетке которой стоит сумма чисел, стоящих в соответствующих клетках таблиц-слагаемых.)

7. Докажите, что для каждого натурального числа $n\geqslant 2008$, взаимно простого с 10, существует натуральное число, кратное n, не меняющееся, если записать его цифры от конца к началу и состоящее менее чем из $\frac{n}{4}$ цифр.

8. В вершинах правильного шестиугольника написаны шесть целых неотрицательных чисел с суммой 2005. Вдумчивый мальчик Боря может стереть число в любой вершине и написать вместо него модуль разности чисел в двух соседних вершинах. Докажите, что Боря может добиться того, чтобы во всех шести вершинах стояли нули.

9. Точки M и N – середины диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, P – точка пересечения этих диагоналей. Описанные окружности треугольников ABP и CDP пересекаются в точках P и K. Описанные окружности треугольников CBP и ADP пересекаются в точках P и L. Докажите, что точки M, N, K и L лежат на одной окружности.

10. Пусть $f(x) = x^2 - 8x + 15$. Сколько различных вещественных корней имеет уравнение $f(f(\ldots f(x)\ldots) = 0$, в котором функция f применена n раз?

Серия 11b, с уклоном в числовые штучки и удвоенными задачами

0. Напишите все неприводимые квадратичные формы с дискриминантом 9.

1. Квадратный трехчлен $f(x) = \mathrm{a}x^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами обладает таким свойством: для любого натурального m найдется натуральное х такое, что $f(x)$ делится на m. Докажите, что корни $f(x)$ рациональны.

2. Докажите, что при $(a, m) = 1$ количество решений сравнения $x^2 \equiv a \pmod m$ либо 0, либо степень 2.

3. а) На данной прямой постройте отрезок данной длины, который виден из данной точки вне прямой под данным углом. Разрешается пользоваться циркулем и линейкой.

б) Даны две прямые и две точки, не лежащие на них. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок с концами на данных прямых, который из первой точки виден под одним данным углом, а из второй точки – под вторым данным углом.

4. Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношением $a_n = [\frac{3}{2}a_{n-1}]$ и $a_1 = 2$. Докажите, что в этой последовательности бесконечно много и четных, и нечетных чисел.

5. Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношением

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n - 1}{2}, & a_n \geqslant 1 \\ \frac{2a_n}{1-a_n}, & a_n < 1 \end{cases}$$

Известно, что a_0 – натуральное, $a_n \neq 2$ при $n = 1, 2, \ldots, 2001$ и $a_{2002} = 2$. Найдите a_0.

6. а) (*Банг и Битти.*) Пусть положительные числа α и β таковы, что множества $A = \{[\alpha x]; x \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{[\beta x]; x \in \mathbb{N}\}$ не пересекаются, а $A \cup B = \mathbb{N}$. Докажите, что это возможно тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

б) Докажите, что не существует таких положительных чисел α, β и γ, что множества $A = \{[\alpha x]; x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{[\beta x]; x \in \mathbb{N}\}$ и $\mathrm{C} = \{[\gamma x]; x \in \mathbb{N}\}$ не пересекаются, и $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$.

7. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На стороне AC нашлась такая точка L, что отрезок A_1L делится пополам высотой CC_1, а отрезок C_1L делится пополам высотой AA_1. Докажите, что $HL \perp OH$, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.

8. Клетки шахматной доски $2n \times 2n$, $n > 1$, покрашены в $2n^2$ цветов так, что каждым цветом покрашены ровно 2 клетки. Докажите, что можно поставить на эту доску $2n$ ладей так, чтобы они не били друг друга, и на каждом цвете стояло не более одной ладьи.

Серия 12b, опять геометрическая

0. В какие теоремы переходят при полярном преобразовании следующие факты:

а) высоты треугольника пересекаются в одной точке;

б) биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке?

1. Назовем натуральное число непоседой, если в его десятичной записи нет одинаковых цифр рядом или через одну. Докажите, что любое натуральное число, большее 1, можно представить как сумму двух непосед.

2. Какое наибольшее количество ладей можно поставить на шахматную доску так, чтобы каждая из них била не более двух других? (Фигуры не бьют друг против друга).

3. Всякий ли многочлен четвертой степени $P(x)$ можно представить в виде $P(x) = R(Q(x))$, где $R(x)$ и $Q(x)$ – квадратные трехчлены?

4. Докажите, что если числа a, b, c при каждом натуральном $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют равенству $[na] + [nb] = [nc]$, то хотя бы одно из чисел a, b является целым.

5. В каждой клетке таблицы $n \times n$ написана некоторая буква, при этом все строки данной таблицы различны. Докажите, что существует столбец, при вычеркивании которого строки оставшейся таблицы по-прежнему будут различными.

6. S – описанная окружность разностороннего треугольника ABC. Пусть K – точка пересечения биссектрисы угла C с касательной к S в точке B, а L – вторая общая точка биссектрисы внешнего угла C с окружностью S. Прямые AC и LB пересекаются в точке M. Докажите, что прямая MK делит отрезок AB пополам.

7. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $\angle ABC = \angle ADC = \angle 135^\circ$. На лучах AB и AD за точками B и D лежат точки M и N такие, что $\angle MCD = \angle NCB = 90^\circ$. Описанные окружности треугольников AMN и ABD пересекаются в точках A и K. Докажите, что $\angle AKC = 90^\circ$.

8. Внутри треугольника ABC выбраны изогонально сопряженные точки P и P_1. Тогда прямые, одна из которых симметрична AP относительно биссектрисы $\angle BPC$, а другая симметрична AP_1 относительно угла BP_1C,симметричны относительно BC.

Серия 13b, для исследования

0. Для каких простых p число -2 является квадратичным вычетом по модулю p?

1. а) Пусть $p=8k+1$ – простое. Докажите, что $p=x^2+2y^2$ для некоторых $x, y \in \mathbb{N}$.

б) Докажите, что число вида $8k+1$ является простым тогда и только тогда, когда оно единственным способом представимо в виде x^2+2y^2, где x и y – взаимно простые натуральные числа.

2. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ задается следующим образом: a_n – это наименьшее натуральное число, не встречающееся среди чисел $a_1, \ldots, a_{n-1}$ и такое, что $a_1+a_2+\ldots+a_n$ делится на n. Докажите, что

а) в последовательности $a_1-1, a_2-2, a_3-3, \ldots$ встречаются все целые числа по одному разу;

б) в последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ встречаются все натуральные числа по одному разу;

в) если $a_n=m$, то $a_m=n$.

г) Обозначим $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\alpha+1$. Докажите, что множество пар вида (n, a_n) совпадает с множеством пар вида $([k\alpha]+1, [k\beta]+1)$ и $([k\beta]+1, [k\alpha]+1)$, где k – целое неотрицательное число.

3. Пусть l – произвольная касательная к вписанной окружности треугольника ABC с центром I, а точки A_1, B_1, C_1 – точки пересечения l с прямыми, проходящими через I параллельно биссектрисам соответствующих внешних углов. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

4. Касательные в точках A и C к описанной окружности ω остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке F. Внутри треугольника BFC нашлась такая точка K, что $\angle KFB=\angle KBC=\angle KCF$. Точка L на стороне AB такова, что $\angle LCB=\angle BFC$. Докажите, что прямая BK делит отрезок LC пополам.

5. Внутри треугольника ABC выбраны изогонально сопряженные точки P и P_1. Прямые AP, BP, CP пересекают прямые BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что прямые, симметричные прямым AP_1, BP_1, CP_1 относительно прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 соответственно, пересекаются в одной точке.

Серия 14b, числово-комбинаторная

-1. Пусть $2^n \pm 1$ – простое число, большее 3. Докажите, что 3 – квадратичный невычет по модулю p.

0. Докажите, что при $(k,p)=1$ верно равенство $\sum\limits_{x=0}^{p-1}\left(\frac{x(x+k)}{p}\right)=-1$.

1. Натуральные числа a и b таковы, что a^2+b^2+1 делится на ab. Докажите, что а) $\frac{a^2+b^2+1}{ab}=3$; б) a и b входят в последовательность чисел Фибоначчи.

2. Последовательность $\{a_n\}$ состоит из натуральных чисел, меньших 2008, причем для любых $n, m \in \mathbb{N}$ число a_m+a_n делится на a_{n+m}. Докажите, что данная последовательность периодична.

3. Существует ли такая непрерывная функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что ее значение в каждой рациональной точке иррационально, а значение в каждой иррациональной точке рационально?

4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $1<n<p$, p – простое нечетное число, $S_x=\sum\limits_{y=0}^{n-1}\left(\frac{x+z}{p}\right)$ и $S=\sum\limits_{x=0}^{p-1}S_x^2$.

а) Докажите, что $S=(p-n)n$. б) Пусть $m\in\mathbb{N}$, $n=[\sqrt{p}]$, $m+2n \leqslant p$. Докажите, что в ряду $m, m+1, \ldots, m+2n-1$ есть квадратичный невычет по модулю p.

5. Рассмотрим все наборы чисел из множества $\{1,2,\ldots,n\}$, не содержащие соседних чисел. Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна $(n+1)!-1$.

6. Игорь рассматривает всевозможные упорядоченные пары подмножеств данного n-элементного множества. Рассмотрев каждую пару, он записывает число элементов в пересечении этих подмножеств. Какое число будет записано больше всего раз, когда Игорь закончит?

7. Последовательность $\{a_n\}$ определена следующими условиями: $a_1=1$ и $a_{n+1}=a_n+[\sqrt{a_n}]$. Докажите, что в этой последовательности бесконечно много точных кубов.

8. Докажите, что не существует такой функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, что $f(f(f(\ldots f(x)\ldots))=x+1$ (f применяется $f(x)$ раз). (*Указание.* Рассмотрите последовательность $a_n=f(a_{n-1})$ и докажите, что в ней все натуральные числа встречаются ровно по одному разу).

9. Пусть l – произвольная прямая, M, N и P – точки пересечения прямой l с прямыми AB, BC и AC треугольника ABC, а M_1, N_1 и N_1 – такие точки на прямой l, что $\angle MOM_1=\angle NON_1=\angle POP_1=90^\circ$. Докажите, что прямые AN_1, BP_1 и CM_1 пересекаются в одной точке.

Серия 15b, окончательная и бесповоротная

1. Рассмотрим функцию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$. Докажите, что $f(f(f(f(f(f(f(x)))))))$ принимает какое-то значение не меньше 2008 раз.

2. Докажите, что число $5^{100}+5^{75}+5^{50}+5^{25}+1$ – составное. (*Указание.* Если $5a$ – точный квадрат, то число $a^4+a^3+a^2+a+1$ раскладывается на множители.)

3. а) На координатной плоскости отмечены целые точки, никакие три из которых не коллинеарны, так, что центр тяжести любого треугольник а с вершинами в отмечнных точках не является целым. Какое наибольшее количество точек может быть отмечено?

б) В пространстве отмечены 37 целых точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что из них можно выбрать три из них так, что центр тяжести образованного ими треугольника является целой точкой.

4. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что выполняется тождество $P(x^2-x+1)\equiv Q(x^2+x+1)$. Докажите, что оба многочлена – константы.

5. а) Пусть p, q, r – непостоянные линейные функции. Докажите, что хотя бы один трехчлен $pq+r$, $qr+p$, $pr+q$ имеет корень.

б) Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – непостоянные линейные функции. Докажите, что не менее $n-2$ многочленов из набора $(p_1p_2\ldots p_{n-1}+p_n)$, $(p_2p_3\ldots p_n+p_1), \ldots, (p_3p_4\ldots p_1+p_2)$ имеют корень.

6. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство $\sqrt[2]{x+\sqrt[3]{y+\sqrt[4]{z}}} \geqslant \sqrt[32]{xyz}$.

7. Докажите неравенство для чисел Фибоначчи $\sqrt[n]{f_{n+1}} > 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{f_n}}$.

8. Точка M находится внутри диаметра AB окружности S, но не совпадает с его центром. По одну сторону от диаметра AB на окружности S взяты две различнеы точки P и Q так, чтобы отрезки PM и QM образовывали с AB равные углы. Докажите, что все такие прямые PQ проходят через одну точку.