Вступительная олимпиада. 04.08.2010

1. За круглым столом сидят $2n$ человек: n физиков и n химиков, причем некоторые из них всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. Известно, что количество химиков-лжецов равно количеству физиков-лжецов. На вопрос: "Кто ваш сосед справа?" все сидящие за столом ответили: "Химик". Докажите, что n четно.

2. Какое наибольшее значение может иметь разность арифметической прогрессии, среди членов которой есть числа $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{17}$?

3. Рассмотрим все возможные наборы чисел из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, не содержащие двух соседних чисел. Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна $(n+1)! - 1$.

4. Можно ли квадрат разрезать на равнобедренные треугольники с углом при основании 75°?

5. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Окружность, проходящая через точки O_1, B и O_2 пересекает вторую окружность также и в точке P. Докажите, что точки O_1, A и P лежат на одной прямой.

6. В языке племени Тру-ля-ля слово — любая последовательность из 10 нулей и единиц. Слова считаются синонимами, если одно можно получить из другого серией следующих операций: можно взять несколько подряд стоящих цифр с четной суммой и поставить на то же место в обратном порядке. Сколько в этом языке различных по смыслу слов?

7. Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к AC пересекает сторону BC в точке D. Прямая, параллельная AD, пересекает сторону AC в точке E, а прямую AB в точке F. Отрезки BE и AD пересекаются в точке G. Докажите, что AC – биссектриса угла FCG.

8. k – натуральное число. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = k+1, a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k$ при всех $n \geqslant 1$. Докажите, что любые два различных члена этой последовательности взаимно просты.

Серия 1: нечто среднее между функциональными уравнениями и комбинаторной геометрией.

1. Найдите все функции целого аргумента $f(\mathrm{x})$, которые при любых целых x и y удовлетворяют соотношению $f(x+y) + f(x-y) = f(3x)$.

2. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая для всех $x \in R$ неравенству $f(x^2) - (f(x))^2 \geqslant 1/4$ и не принимающая никакое значение более чем в одной точке?

3. Докажите, что если функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет для всех $x, y \in \mathbb{R}$ неравенствам $f(x) \leqslant x$, $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$, то справедливо тождество $f(x) \equiv x$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Найдите все функции а) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, б) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, удовлетворяющие условию $f(1) = 2$ и тождеству $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$ при всех x и y.

5. Огурцовая река, протекающая в Цветочном городе, в районе пристани имеет несколько островов, общий периметр которых равен 8 метрам. Знайка утверждает, что можно отчалить на лодке от пристани и переправиться на другой берег, проплыв менее 3 метров. Берега реки в районе пристани параллельны, а ширина ее равна 1 м. Прав ли Знайка?

6. В квадрате со стороной 15 расположено 20 попарно непересекающихся квадратиков со стороной 1. Докажите, что в большом квадрате можно разместить круг радиуса 1 так, чтобы он не пересекался ни с одним из квадратиков.

7. Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму равнобедренных трапеций с основаниями 3 см, 1 см и высотой 1 см, нельзя составить прямоугольник.

8. В квадрате со стороной 50 расположена ломаная. Докажите, что если расстояние от любой точки квадрата хотя бы до одной точки ломаной не больше 1, то длина ломаной больше 1248.

Серия 2: поставим комбинаторную геометрию на солидную базу!

1. На плоскости отметили 4000 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно построить 1000 непересекающихся четырехугольников (возможно, невыпуклых) с вершинами в этих точках.

2. Рассмотрим все треугольники с вершинами в вершинах выпуклого 2000-угольника. Докажите, что любая точка, не лежащая на сторонах треугольников, покрыта четным числом треугольников.

3. Треугольник разрезан на несколько выпуклых многоугольников. Докажите, что среди них можно найти либо треугольник, либо два многоугольника с одинаковым числом сторон.

4. Докажите, что

а) при простом $p > 2$ $\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$;

б) (теорема Вольстенхольма, 1862) при простом $p > 3$ $\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p^2}$.

5. Найдите все пары (p, q) простых чисел такие, что число $2^p - 1$ делится на q, и среди простых делителей числа $q - 1$ имеются только числа 2, 3, 5 и 7.

6. Найдите хотя бы одну пару целых чисел (x, y) такую, что число $(x+y)^7 - x^7 - y^7$ делится на 7^7, а число $(x+y)xy$ не делится на 7.

7. Докажите, что в выпуклом $2n$-угольнике найдется диагональ, не параллельная ни одной из сторон.

8. Шесть кругов имеют общую точку. Докажите, что хотя бы один из них содержит центр некоторого другого круга.

Серия 3, с многочленами.

1. Вычеты a и b принадлежат к показателям k и l по простому модулю p.

а) Докажите, что если $(k, l) = 1$, то ab принадлежит к показателю kl.

б) Верно ли, что при любых k и l вычет ab принадлежит к показателю $[k, l]$?

2. а) Докажите, что $x^{p-1}-1 \equiv (x-1)(x-2)\dots(x-(p-1)) \pmod p$ (имеется в виду совпадение многочленов $\bmod p$, то есть то, что соответствующие коэффициенты левой и правой частей сравнимы $\bmod p$.

б) Выведите из утверждения п.а) теорему Вильсона: $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ при простом p.

3. Число 76 обладает следующим свойством: последние две цифры числа $76^2 = 5776$ дают снова 76.

а) Найдите все трехзначные числа A такие, у которых последние три цифры числа A^2 составляют число A.

б) Существует ли бесконечная последовательность цифр a_0, a_1, a_2, …такая, что для любого n квадрат записываемого ими числа $\overline{a_n a_{n-1}\dots a_2 a_1 a_0}$ оканчивается цифрами $\overline{\dots a_n a_{n-1}\dots a_2 a_1 a_0}$? (Очевидные ответы $a_0 = 0$ или 1, $a_i = 0$ при $i > 1$ исключаем). Проведите полное исследование.

4. Докажите, что для каждом натуральном n $\sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_k\leqslant n} \frac{1}{i_1 i_2 \dots i_k} = n$, где суммирование ведется по всем возможным наборам чисел $i_1 < i_2 < \dots < i_k, k = 1, 2, \dots, n$, из множества $\{1; 2; \dots; n\}$.

5. Найдите все такие a и b, при которых многочлен $x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$ является полным квадратом.

6. Множество целых чисел таково, что разность двух любых чисел из этого множества также принадлежит ему. Опишите все такие множества.

7. Найдите коэффициенты при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(x^7 + x^5 + 1)^{20}$.

8. У какого из многочленов $(1 + x^2 - x^3)^{1000}$ и $(1 - x^2 + x^3)^{1000}$ больший коэффициент при x^{20}?

Серия 4(b): …и комбинаторная геометрия

1. При каких n многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$?

2. Докажите, что многочлен $(x^2 - x + 1)^{100} + (x^2 + x + 1)^{100}$ не содержит нечетных степеней x.

3. Докажите, что многочлен $4x^{1000}+3$ нельзя представить в виде суммы квадратов трех многочленов с целыми коэффициентами.

4. $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами. Известно, что многочлен $P(x^3) + xQ(x^3)$ делится на $x^3 - 1$. Докажите, что $P(x)$ и $Q(x)$ оба делятся на $x - 1$.

5. a, b, c, d — натуральные числа, $ab = cd$.

а) Докажите, что существуют натуральные числа u_1, v_1, u_2, v_2, для которых $a = u_1v_1$, $b = u_2v_2$, $c = u_1u_2$, $d = v_1v_2$.

б) Докажите, что число $a + b + c + d$ — составное.

6. Дан многочлен F с целыми коэффициентами такой, что $F(2)$ делится на пять, а $F(5)$ делится на два. Докажите, что $F(7)$ делится на 10.

7. В некотором лесу расстояние между любыми двумя деревьями не превосходит разности их высот. Все деревья имеют высоту не более 100 м. Докажите, что лес можно обнести забором длиной 200 м.

8. На конгресс собрались ученые, среди которых есть друзья. Оказалось, что любые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Доказать, что найдется ученый, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.

9. На плоскости дано несколько выпуклых многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, которая пересекает все эти многоугольники.

Серия 5(b): многочлены нескольких переменных и еще чуть-чуть КГ.

1. Вещественные числа a, b, c таковы, что $a + b + c > 0$, $ab + ac + bc > 0$, $abc > 0$. Докажите, что числа a, b, c положительны.

2. Докажите, что многочлен $(x + y + z)^{333} - x^{333} - y^{333} - z^{333}$ делится на $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

3. а) Найдите наименьшее возможное значение многочлена $P(x, y) = 4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2$.

б) Докажите, что этот многочлен нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов от переменных x, y.

4. Докажите, что простое число не может двумя различными способами представляться в виде суммы двух квадратов.

5. Докажите, что любой выпуклый многоугольник, отличный от параллелограмма, можно поместить в треугольник, образованный продолжениями его сторон.

6. В квадрат 1×1 помещен выпуклый многоугольник площади, большей $1/2$. Докажите, что он содержит центр квадрата.

7. Докажите, что в любом конечном множестве точек плоскости найдется точка, у которой не более трех ближайших среди точек этого множества.

8. Квадрат 1×1 покрыт квадратами со сторонами, параллельными его сторонам. Докажите, что из них можно выбрать несколько непересекающихся квадратов, вместе покрывающих площадь не менее $1/9$.

Серия 6, с элементами геометрических неравенств

1. Пусть $f(x) \in R[x]$ – многочлен над кольцом R. Разложим многочлен $f(x+h) \in R[x,h]$ по степеням h: $f(x+h) = f(x) + hf_1(x) + h^2f_2(x) + \dots$, или $f(x+h) \equiv f(x) + hf_1(x) \pmod{h^2}$. *Производная* многочлена $f(x)$ (обозначается $f'(x)$) – это многочлен $f_1(x)$. Докажите, что а) $(f+g)' = f' + g'$; б) $(fg)' = f'g + fg'$; в) если $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, то $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1}$; г) если α – корень многочлена f кратности k, то α – корень f' кратности не менее $k - 1$.

2. Доказать, что многочлен $x^{200} \cdot y^{200} + 1$ нельзя представить в виде произведения многочленов от одного только x и от одного только y, т.е. в виде $f(x) \cdot g(y)$.

3. Пусть $P(x,y)$ – многочлен двух переменных. Известно, что

а) для любых x, y и z имеем $P(x+z,y+z)=P(x,y)$;

б) для любых x и y имеем $P(x+1,y+1)=P(x,y)$.

Докажите, что существует такой многочлен одной переменной $Q(z)$, что для любых x и y выполняется равенство $P(x,y)=Q(x-y)$.

4. Найдите все k, для которых многочлен $x^3+y^3+z^3-kxyz$ делится на $x+y+z$.

5. В таблицу $n\times n$ записаны n^2 чисел, сумма которых неотрицательна. Докажите, что можно переставить столбцы так, что сумма чисел по диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, будет неотрицательна.

6. M и N – середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $MN\leqslant\frac{1}{2}(BC+AD)$.

7. На бесконечном клетчатом листе со стороной клетки 1 построен треугольник ABC с вершинами в узлах. Докажите, что если $AB>AC$, то $AB-AC>1/P$, где P – периметр треугольника ABC.

8. Равносторонний треугольник со стороной 2 покрыт пятью меньшими равными равносторонними треугольниками. Докажите, что их стороны не меньше 1.

Серия 7(b), с правилом крайнего.

1. Докажите, что многочлен $P(x)$ степени n, принимающий целые значения при $x=0,1,\ldots,n$, принимает целые значения при всех целых x.

2. Многочлен $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$ принимает целые значения при всех целых x. Докажите, что $n!a_n$ – целое число.

3. Решите в целых числах уравнение $(a+b\sqrt{3})^4+(c+d\sqrt{3})^4=1+\sqrt{3}$.

4. а) Трехчлен ax^2+bx+c при всех целых x является четвертой степенью целого числа. Докажите, что $a=b=0$.

б) Трехчлен ax^2+bx+c при всех целых x является точным квадратом. Доказать, что тогда $ax^2+bx+c=(dx+e)^2$.

5. На бесконечной клетчатой плоскости некоторые клетки закрашены в зеленый цвет. Докажите, что найдется клетка, у которой а) не более 2 зеленых соседних клеток, имеющих с ней общую сторону; б) не более 4 зеленых соседних клеток, имеющих с ней хотя бы одну общую точку.

6. На плоскости расположены n точек так, что любой треугольник с вершинами в этих точках имеет площадь не больше 1. Докажите, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.

7. Прямоугольная таблица из m строк и n столбцов заполнена числами. Переставим числа в каждой строке в порядке возрастания. Докажите, что если после этого переставить числа в каждом столбце в порядке возрастания, то в каждой строке они будут по-прежнему стоять в порядке возрастания.

8. На бесконечном листе клетчатой бумаги N клеток выкрашено в черный цвет. Докажите, что из листа можно вырезать конечное число квадратов так, что будут выполнены два условия:

1) все черные клетки будут лежать в вырезанных квадратах;

2) в любом вырезанном квадрате K площадь черных клеток составит не менее $\frac{1}{5}$ и не более $\frac{4}{5}$ площади K.

Серия 8(b): найдите на картинке комплексные числа.

1. а) Докажите, что многочлен $P_n(x)=\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$ принимает целые значения при всех целых x.

б) Докажите, что многочлен $P(x)=c_nP_n(x)+c_{n-1}P_{n-1}(x)+\ldots+c_0P_0(x)$, где $c_0,c_1,\ldots,c_n$ – целые числа, принимает целые значения при всех целых x.

в) Докажите, что всякий многочлен $P(x)$ степени n, принимающий целые значения при всех целых x, можно представить в виде $P(x)=c_nP_n(x)+c_{n-1}P_{n-1}(x)+\ldots+c_0P_0(x)$, где $c_0,c_1,\ldots,c_n$ – целые числа.

г) Докажите, что многочлен $P(x)$ степени n, принимающий целые значения при $x=0,1,\ldots,n$, принимает целые значения при всех целых x.

д) Докажите, что многочлен $P(x)$ степени n, принимающий целые значения в $n+1$ последовательных целых точках, принимает целые значения при всех целых x.

2. Многочлен $P(x)$ имеет хотя бы один корень, а многочлен $P(P(x))$ – нет. Докажите, что все корни $P(x)$ одного знака.

3. Точки, соответствующие комплексным числам z_1, z_2, …, z_n лежат в вершинах выпуклого n-угольника. Докажите, что если связаны соотношением $\frac{1}{z_1-c}+\frac{1}{z_2-c}+\ldots+\frac{1}{z_n-c}=0$, то точка c лежит внутри этого n-угольника.

4. Решите систему уравнений $x+\frac{3x-y}{x^2+y^2}=3$, $y-\frac{x+3y}{x^2+y^2}=0$.

5. Решите систему уравнений $\cos x+\cos y=\cos\alpha, \sin x+\sin y=\sin\alpha$.

6. Выпуклый многоугольник с площадью S содержится в квадрате с площадью a^2. Докажите, что внутри многоугольника можно поместить отрезок длины S/a.

7. Выпуклый 17-угольник разбит диагоналями на меньшие многоугольники. Какое наибольшее число сторон может оказаться у многоугольника разбиения?

8. Периметр выпуклого четырехугольника равен 4. Докажите, что его площадь не больше 1.

Серия 9(b), про суммы квадратов

1. Решите сравнение $x^4+x^3+x^2+x+1\equiv 0\pmod{1987}$.

2. Натуральные числа x, y и z таковы, что $xy=z^2+1$. Докажите, что существуют целые числа a, b, c и d такие, что $x=a^2+b^2$, $y=c^2+d^2$ и $z=ac+bd$.

3. Решите в целых числах уравнение $x^2 + 4 = y^3$.

4. а) Пусть N – целое рациональное число. Докажите, что его разложение на простые гауссовы множители имеет вид

$$N = p_1 p_2 \dots p_k \pi_1 \overline{\pi_1} \pi_2 \overline{\pi_2} \dots \pi_l \overline{\pi_l},$$

где $p_1, p_2, \dots, p_k$ – целые рациональные простые, а π_1 и $\overline{\pi_1}$, π_2 и $\overline{\pi_2}$, …, π_l и $\overline{\pi_l}$ – пары комплексно сопряженных простых гауссовых чисел.

б) Докажите, что рациональное простое число вида $4k+3$ является простым и в $\mathbb{Z}[i]$.

в) Докажите, что для любого рационального простого числа p вида $4k+1$ существует гауссово число α, не кратное p и такое, что $N\alpha$ делится на p.

г) Докажите, что рациональное простое число вида $4k+1$ раскладывается в произведение двух комплексно сопряженных простых гауссовых чисел: $p = \pi\overline{\pi}$.

д) Докажите, что натуральное число представляется в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда все простые числа вида $4k+3$ входят в его разложение на простые множители в четных степенях.

е) Докажите, что число решений уравнения $x^2 + y^2 = N$ в целых числах равно учетверенной разности количества делителей N вида $4k+1$ и количества делителей N вида $4k+3$ (в частности, это означает, что количество первых всегда не меньше количества вторых).

5. Из угла прямоугольного биллиарда с целыми сторонами пущен шар по биссектрисе этого угла. Докажите, что после нескольких отражений (по закону "угол падения равен углу отражения") шар снова попадет в один из углов биллиарда.

6. В клетках таблицы $n \times n$ расставлены ладьи. Известно, что, если на какой-нибудь клетке ладьи нет, то на клетках, стоящих по вертикали и по горизонтали, которые содержат эту клетку, стоит (всего) не менее n ладей. Докажите, что общее число ладей в таблице не менее $\frac{n^2}{2}$.

7. Правильный шестиугольник разбит на N равновеликих параллелограммов. Докажите, что N делится на 3.

8. Стекло имеет форму квадрата площади 1. На обеих сторонах этого стекла нарисованы карты, по пять стран на каждой карте. Страны на одной стороне стекла закрашены пятью различными красками. Требуется закрасить страны на противоположной стороне стекла теми же пятью красками так, чтобы: а) разные страны были закрашены разными красками; б) общая площадь участков стекла, окрашенных с обеих сторон в один цвет, была не меньше $1/5$. Всегда ли это можно сделать?

Серия 10(b), информативная

1. а) Решетка, являющаяся подмножеством решетки всех векторов с целыми координатами, вместе с каждым своим вектором содержит вектор, перпендикулярный ему и равный ему по длине. Докажите, что эта решетка подобна решетке всех целочисленных векторов.

б) У решетки Λ, основным параллелограммом которой является прямоугольник $1 \times \sqrt{5}$, выбрали подрешетку, которая вместе с каждым своим вектором содержит вектор, перпендикулярный ему и превосходящий его по длине в $\sqrt{5}$ раз. Верно ли, что эта подрешетка подобна исходной решетке?

2. Пусть $p > 2$ – простое число. Величину $D = b^2 - 4ac$ мы назовем *дискриминантом* сравнения $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p$. Докажите, что это сравнение

а) при $D \equiv 0 \pmod p$ имеет единственный корень (двойной);

б) при $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$ имеет два различных корня, а при $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$ не имеет корней.

3. Докажите, что сравнение $x^3 \equiv a \pmod p$ при простом p и a, не кратном p

а) имеет 0 или 3 решения, если p имеет вид $6k+1$;

б) имеет 1 решение, если p имеет вид $6k+5$.

4. Докажите, что простых чисел вида $6k+1$ бесконечно много.

5. Пусть $p = 8k+1$ – простое число. Докажите, что:

а) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 8k \equiv (-1)^{2k}(4k)! \pmod p$;

б) 2 – квадратичный вычет mod$p$.

6. A – нечетное число, X и Y – корни уравнения $t^2 + At - 1 = 0$. Докажите, что при любом натуральном k $X^k + Y^k$ и $X^{k+1} + Y^{k+1}$ – целые взаимно простые числа.

7. Город Сигмаград имеет форму квадрата со стороной 5 км. Улицы делят его на кварталы, являющиеся квадратами со стороной 200 м. Какую наибольшую площадь можно обойти, пройдя по улицам этого города 10 км и вернувшись в исходную точку?

8. Какое наибольшее количество точек можно расставить на отрезке длины 1 так, чтобы на любом отрезке длины d оказалось не более $1000d^2 + 1$ точек?

9. Каждая вершина прямоугольника P покрыта прямоугольной салфеткой со сторонами, параллельными сторонам P. Любые две из этих салфеток перекрываются. Докажите, что салфетки покрывают весь прямоугольник P.

Серия 11(b): небольшая добавочная

1. Пусть a, b, c, d – такие целые числа, что система уравнений $ax + by = m$, $cx + dy = n$ при любых целых m и n имеет решение в целых числах. Докажите, что $ad - bc = \pm 1$.

2. $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$ (m и n – натуральные числа). Докажите, что $\frac{m}{n} < \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.

3. В выпуклом шестиугольнике все углы равны. Докажите, что разности противоположных сторон такого шестиугольника равны между собой.

4. Дан выпуклый пятиугольник, все углы которого тупые. Докажите, что в нем найдутся две такие диагонали, что круги, построенные на них как на диаметрах, полностью покроют пятиугольник.