Вступительная олимпиада. 04.08.2010

1. За круглым столом сидят $2n$ человек: n физиков и n химиков, причем некоторые из них всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. Известно, что количество химиков-лжецов равно количеству физиков-лжецов. На вопрос: "Кто ваш сосед справа?" все сидящие за столом ответили: "Химик". Докажите, что n четно.

2. Какое наибольшее значение может иметь разность арифметической прогрессии, среди членов которой есть числа $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{17}$?

3. Рассмотрим все возможные наборы чисел из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, не содержащие двух соседних чисел. Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна $(n+1)! - 1$.

4. Можно ли квадрат разрезать на равнобедренные треугольники с углом при основании $75°$?

5. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Окружность, проходящая через точки O_1, B и O_2 пересекает вторую окружность также и в точке P. Докажите, что точки O_1, A и P лежат на одной прямой.

6. В языке племени Тру-ля-ля слово — любая последовательность из 10 нулей и единиц. Слова считаются синонимами, если одно можно получить из другого серией следующих операций: можно взять несколько подряд стоящих цифр с четной суммой и поставить на то же место в обратном порядке. Сколько в этом языке различных по смыслу слов?

7. Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к AC пересекает сторону BC в точке D. Прямая, параллельная AD, пересекает сторону AC в точке E, а прямую AB в точке F. Отрезки BE и AD пересекаются в точке G. Докажите, что AC – биссектриса угла FCG.

8. k – натуральное число. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = k+1, a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k$ при всех $n \geqslant 1$. Докажите, что любые два различных члена этой последовательности взаимно просты.

Серия 1: нечто среднее между функциональными уравнениями и комбинаторной геометрией.

1. Найдите все функции целого аргумента $f(\mathrm{x})$, которые при любых целых x и y удовлетворяют соотношению $f(x+y) + f(x-y) = f(3x)$.

2. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая для всех $x \in R$ неравенству $f(x^2) - (f(x))^2 \geqslant 1/4$ и не принимающая никакое значение более чем в одной точке?

3. Докажите, что если функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет для всех $x, y \in \mathbb{R}$ неравенствам $f(x) \leqslant x$, $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$, то справедливо тождество $f(x) \equiv x$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Найдите все функции а) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, б) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, удовлетворяющие условию $f(1) = 2$ и тождеству $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$ при всех x и y.

5. Огурцовая река, протекающая в Цветочном городе, в районе пристани имеет несколько островов, общий периметр которых равен 8 метрам. Знайка утверждает, что можно отчалить на лодке от пристани и переправиться на другой берег, проплыв менее 3 метров. Берега реки в районе пристани параллельны, а ширина ее равна 1 м. Прав ли Знайка?

6. В квадрате со стороной 15 расположено 20 попарно непересекающихся квадратиков со стороной 1. Докажите, что в большом квадрате можно разместить круг радиуса 1 так, чтобы он не пересекался ни с одним из квадратиков.

7. Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму равнобедренных трапеций с основаниями 3 см, 1 см и высотой 1 см, нельзя составить прямоугольник.

8. В квадрате со стороной 50 расположена ломаная. Докажите, что если расстояние от любой точки квадрата хотя бы до одной точки ломаной не больше 1, то длина ломаной больше 1248.

Серия 2: продолжение функциональных уравнений – и арифметика

1. Функция $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $f(n) = \begin{cases} n - 10, \text{ если } n > 100, \\ f(f(n+11)), \text{ если } n \leqslant 100, \end{cases}$ при $n \in \mathbb{Z}$. Докажите, что для любого значения $n \leqslant 100$ справедливо равенство $f(n) = 91$.

2. Квадратные трехчлены f и g таковы, что если $f(a) \in \mathbb{Z}$, то $g(a) \in \mathbb{Z}$. Докажите, что существуют целые числа m и n такие, что $g(x) = mf(x) + n$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

3. Пусть $f(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, степени не менее 2. Последовательность многочленов $g_n(x) = \underbrace{f(\ldots f}_{n}(x)\ldots)$ такова, что у многочленов $g_1, \ldots, g_{100}$ все корни различны и вещественны. Обозначим через r_n среднее арифметическое корней многочлена $g_n(x)$. Известно, что $r_{19} = 99$. Найдите r_{99}.

4. Докажите, что

а) при простом $p > 2$ $\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$;

б) (теорема Вольстенхольма, 1862) при простом $p > 3$ $\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p^2}$.

5. Найдите все пары (p, q) простых чисел такие, что число $2^p - 1$ делится на q, и среди простых делителей числа $q - 1$ имеются только числа 2, 3, 5 и 7.

6. Найдите хотя бы одну пару целых чисел (x, y) такую, что число $(x+y)^7 - x^7 - y^7$ делится на 7^7, а число $(x+y)xy$ не делится на 7.

7. Докажите, что ни при каком натуральном $n > 1$ число $2^n - 1$ не делится на n.

8. На плоскости лежит правильный восьмиугольник со стороной a. Его разрешается "перекатывать" по плоскости, переворачивая (симметрично отражая) относительно любой стороны. Докажите, что для любой точки плоскости и любого $\varepsilon > 0$ можно перекатить восьмиугольник в такое положение, что центр его будет находиться от точки M на расстоянии меньше ε.

9. Отметим в натуральном ряде числа, которые можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел. Докажите, что среди отмеченных чисел встретится бесконечно много а) пар, б) троек последовательных чисел.

Серия 3: арифметика, многочлены

1. Вычеты a и b принадлежат к показателям k и l по простому модулю p.

а) Докажите, что если $(k,l)=1$, то ab принадлежит к показателю kl.

б) Верно ли, что при любых k и l вычет ab принадлежит к показателю $[k,l]$?

2. а) Докажите, что $x^{p-1}-1\equiv(x-1)(x-2)\dots(x-(p-1))\pmod p$ (имеется в виду совпадение многочленов mod$p$, то есть то, что соответствующие коэффициенты левой и правой частей сравнимы mod$p$.

б) Выведите из утверждения п.а) теорему Вильсона: $(p-1)!\equiv-1\pmod p$ при простом p.

3. Число 76 обладает следующим свойством: последние две цифры числа $76^2=5776$ дают снова 76.

а) Найдите все трехзначные числа A такие, у которых последние три цифры числа A^2 составляют число A.

б) Существует ли бесконечная последовательность цифр a_0, a_1, a_2, …такая, что для любого n квадрат записываемого ими числа $\overline{a_na_{n-1}\dots a_2a_1a_0}$ оканчивается цифрами $\overline{\dots a_na_{n-1}\dots a_2a_1a_0}$? (Очевидные ответы $a_0=0$ или 1, $a_i=0$ при $i>1$ исключаем). Проведите полное исследование.

4. Докажите, что для каждом натуральном n $\sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_k\leqslant n}\frac{1}{i_1i_2\dots i_k}=n$, где суммирование ведется по всем возможным наборам чисел $i_1<i_2<\dots<i_k, k=1,2,\dots,n$, из множества $\{1;2;\dots;n\}$.

5. (Теорема Ламе.) К натуральным числам a и b, а $>b$, применяется алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя этих чисел. Докажите, что число делений с остатком не превосходит $5p$, где p – количество цифр в десятичной записи числа b.

6. Докажите, что из любых n чисел можно выбрать несколько (быть может, одно) так, что сумма выбранных чисел отличается от ближайшего к ней целого числа не более, чем на $1/(n+1)$.

7. Пусть p, q – простые числа, $q>5$. Докажите, что если $q|2^p+3^p$, то $q>p$.

8. Два многочлена с вещественными коэффициентами принимают целые значения в одних и тех же точках. Докажите, что либо их сумма, либо их разность есть константа.

Серия 4, с разными многочленами

1. При каких n многочлен $x^{2n}+x^n+1$ делится на x^2+x+1?

2. Докажите, что многочлен $(x^2-x+1)^{100}+(x^2+x+1)^{100}$ не содержит нечетных степеней x.

3. Докажите, что многочлен $4x^{1000}+3$ нельзя представить в виде суммы квадратов трех многочленов с целыми коэффициентами.

4. $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами. Известно, что многочлен $P(x^3)+xQ(x^3)$ делится на x^3-1. Докажите, что $P(x)$ и $Q(x)$ оба делятся на $x-1$.

5. a, b, c, d — натуральные числа, $ab=cd$.

а) Докажите, что существуют натуральные числа u_1, v_1, u_2, v_2, для которых $a=u_1v_1$, $b=u_2v_2$, $c=u_1u_2$, $d=v_1v_2$.

б) Докажите, что число $a+b+c+d$ — составное.

6. Докажите тождество

$$\frac{C_n^0}{x}-\frac{C_n^1}{x+1}+\dots+(-1)^n\frac{C_n^n}{x+n}=\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

7. Многочлен p обладает таким свойством: для некоторого числа a $p(x)=p(a-x)$. Докажите, что $p(x)$ можно представить в виде многочлена от $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$.

8. Докажите, что ни для какого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами не могут найтись такие различные целые числа x_1, x_2, …, x_n $(n\geqslant3)$, для которых выполнялись бы равенства $P(x_1)=x_2$, $P(x_2)=x_3$, …, $P(x_{n-1})=x_n$, $P(x_n)=x_1$.

9. Про положительные числа a, b, c, x, y, z известно, что $a<b<c$; $a<x<y<z<c$; $abc=xyz$; $a+b+c=x+y+z$. Докажите, что $a=x$, $b=y$, $c=z$.

Серия 5(а), в которой появляются многочлены нескольких переменных

1. Докажите, что если x, y и z – различные целые числа, а n – неотрицательное целое число, то $\frac{x^n}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^n}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$ – целое число.

2. Докажите, что многочлен $(x+y+z)^{333}-x^{333}-y^{333}-z^{333}$ делится на $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

3. а) Найдите наименьшее возможное значение многочлена $P(x,y)=4+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2$.

б) Докажите, что этот многочлен нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов от переменных x, y.

4. Докажите, что простое число не может двумя различными способами представляться в виде суммы двух квадратов.

5. а) Дан многочлен с целыми коэффициентами. В трех целых точках он принимает значение 2. Докажите, что ни в какой целой точке он не принимает значение 3.

б) Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами при некоторых целых x принимает значения 1, 2 и 3. Докажите, что существует не более одного целого числа x, при котором значение этого многочлена равно 5.

6. Пусть $P(x,y)$ обозначает многочлен с действительными коэффициентами от двух переменных и $P(x,y)=0$ для любых действительных x и y таких, что $x^2+y^2=1$. Доказать, что существует такой многочлен $Q(x,y)$, что $P(x,y)=(x^2+y^2-1)Q(x,y)$.

7. Натуральные числа x и y удовлетворяют равенству $x^2-y^3=17$. Докажите, что число y^2+2x+2 — составное.

8. Пусть a – наибольший положительный корень уравнения $x^3-3x^2+1=0$. Докажите, что числа $[a^{1788}]$ и $[a^{1988}]$ оба делятся на 17.

Серия 6(а), с производной многочлена, блэкджеком и пр.

1. Пусть $f(x)\in R[x]$ – многочлен над кольцом R. Разложим многочлен $f(x+h)\in R[x,h]$ по степеням h: $f(x+h)=f(x)+hf_1(x)+h^2f_2(x)+\ldots$, или $f(x+h)\equiv f(x)+hf_1(x) \pmod{h^2}$. *Производная* многочлена $f(x)$ (обозначается $f'(x)$) – это многочлен $f_1(x)$. Докажите, что а) $(f+g)'=f'+g'$; б) $(fg)'=f'g+fg'$; в) если $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$, то $f'(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}ka_kx^{k-1}$; г) если α – корень многочлена f кратности k, то α – корень f' кратности не менее $k-1$.

2. Доказать, что многочлен $x^{200}\cdot y^{200}+1$ нельзя представить в виде произведения многочленов от одного только x и от одного только y, т.е. в виде $f(x)\cdot g(y)$.

3. Пусть $P(x,y)$ – многочлен двух переменных. Известно, что

а) для любых x, y и z имеем $P(x+z,y+z)=P(x,y)$;

б) для любых x и y имеем $P(x+1,y+1)=P(x,y)$.

Докажите, что существует такой многочлен одной переменной $Q(z)$, что для любых x и y выполняется равенство $P(x,y)=Q(x-y)$.

4. Найдите все k, для которых многочлен $x^3+y^3+z^3-kxyz$ делится на $x+y+z$.

5. Докажите, что для любого $n\in\mathbb{N}$ существует многочлен $P_n(x)$ степени n с целыми коэффициентами, удовлетворяющий тождеству $2\cos nt=P_n(2\cos t), t\in\mathbb{R}$.

6. Докажите, что для любого $\alpha\in\mathbb{Q}$ число $\cos\alpha\pi$ либо совпадает с одним из чисел 0, $\pm1/2$, ±1, либо иррационально.

7. (А.Туэ(1863-1922)). Пусть $n>1$ – натуральное число. Тогда для каждого натурального a, взаимно простого с n, существуют такие натуральные $x\leqslant\sqrt{n}$, $y\leqslant\sqrt{n}$, что $ay\equiv\pm x \pmod{n}$.

8. Докажите, что при любых натуральных $a>1$ и n число $\varphi(a^n-1)$ делится на n.

Серия 7(а). Последние новости.

1. Докажите, что многочлен $P(x)$ степени n, принимающий целые значения при $x=0,1,\ldots,n$, принимает целые значения при всех целых x.

2. Многочлен $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$ принимает целые значения при всех целых x. Докажите, что $n!a_n$ – целое число.

3. Решите в целых числах уравнение $(a+b\sqrt{3})^4+(c+d\sqrt{3})^4=1+\sqrt{3}$.

4. а) Трехчлен ax^2+bx+c при всех целых x является четвертой степенью целого числа. Докажите, что $a=b=0$.

б) Трехчлен ax^2+bx+c при всех целых x является точным квадратом. Доказать, что тогда $ax^2+bx+c=(dx+e)^2$.

5. Целые числа a, b, и c таковы, что числа $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ и $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$ тоже целые. Докажите, что $|a|=|b|=|c|$.

6. Многочлен $P(x)$ степени 1004 удовлетворяет условиям $P(k)=F_k$ при $k=1006,\ldots,2010$ ($F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$). Найдите $P(2011)$.

7. Горизонтальную прямую, пересекающую график многочлена 4 степени в 4 точках A, B, C, D (точки перечислены в порядке возрастания абсцисс), назовем *треугольной*, если из отрезков AB, AC, AD можно составить треугольник. Докажите, что либо все горизонтальные прямые, пересекающие этот график в 4 точках, треугольные, либо среди них вообще нет треугольных.

8. Известно, что $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ – квадратные трехчлены. Может ли уравнение $f(g(h(x)))=0$ иметь корни 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8?

Серия 8(а), пока без гауссовых чисел

1. а) Докажите, что многочлен $P_n(x)=\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$ принимает целые значения при всех целых x.

б) Докажите, что многочлен $P(x)=c_nP_n(x)+c_{n-1}P_{n-1}(x)+\ldots+c_0P_0(x)$, где $c_0,c_1,\ldots,c_n$ – целые числа, принимает целые значения при всех целых x.

в) Докажите, что всякий многочлен $P(x)$ степени n, принимающий целые значения при всех целых x, можно представить в виде $P(x)=c_nP_n(x)+c_{n-1}P_{n-1}(x)+\ldots+c_0P_0(x)$, где $c_0,c_1,\ldots,c_n$ – целые числа.

г) Докажите, что многочлен $P(x)$ степени n, принимающий целые значения при $x=0,1,\ldots,n$, принимает целые значения при всех целых x.

д) Докажите, что многочлен $P(x)$ степени n, принимающий целые значения в $n+1$ последовательных целых точках, принимает целые значения при всех целых x.

2. Многочлен $P(x)$ имеет хотя бы один корень, а многочлен $P(P(x))$ – нет. Докажите, что все корни $P(x)$ одного знака.

3. Точки, соответствующие комплексным числам z_1, z_2, $\ldots$, z_n лежат в вершинах выпуклого n-угольника. Докажите, что если связаны соотношением $\frac{1}{z_1-c}+\frac{1}{z_2-c}+\ldots+\frac{1}{z_n-c}=0$, то точка c лежит внутри этого n-угольника.

4. Могут ли многочлены $x^5 - x - 1$ и $x^2 + ax + b$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, иметь общие комплексные корни?

5. Пусть $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, где $n > 1$ – целое число. Докажите, что $f(x)$ не может быть представлен в виде произведения двух многочленов, каждый из которых степени не меньшей 1 и все коэффициенты которых – целые числа.

6. Найдите все многочлены от 2 переменных $P(x, y)$ такие, что при любых вещественных a, b, c, d имеет место соотношение $P(a, b) \cdot P(c, d) = P(ac + bd, ad + bc)$.

7. Докажите, что для любого натурального числа n число $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \cdot 2^{3k}$ не делится на 5.

8. (Теорема Штурма, 1829).Пусть $P(x) = P_0(x)$ – многочлен с вещественными коэффициентами. Определим многочлены P_1, P_2,..., P_k следующим образом: $P_1(x) = P'(x)$, $P(x) = Q_1(x)P_1(x) - P_2(x)$, $P_1(x) = Q_2(x)P_2(x) - P_3(x)$,..., $P_{k-1}(x) = Q_k(x)P_k(x)$ (проводится алгоритм Евклида с точностью до знаков при остатках).

Последовательность многочленов $P_0(x)$, $P_1(x)$,..., $P_k(x)$ принято называть *рядом Штурма*.

Для каждого вещественного числа a, не являющегося корнем многочлена $P(x)$, определим $w(a)$ как число перемен знака в последовательности $P_0(a)$, $P_1(a)$,..., $P_k(a)$, из которой удалены все нули. Докажите, что если b и c ($b < c$) — произвольные вещественные числа, не являющиеся корнями $P(x)$, то число *различных* корней $P(x)$ на интервале $[b, c]$ равно $w(b) - w(c)$, если

а) многочлен $P(x)$ не имеет кратных корней;

б) многочлен $P(x)$ – произвольный.

Серия 9, теперь – с гауссовыми числами.

1. Решите сравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{1987}$.

2. Натуральные числа x, y и z таковы, что $xy = z^2 + 1$. Докажите, что существуют целые числа a, b, c и d такие, что $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$ и $z = ac + bd$.

3. Решите в целых числах уравнение $x^2 + 4 = y^3$.

4. а) Пусть N – целое рациональное число. Докажите, что его разложение на простые гауссовы множители имеет вид

$$N = p_1 p_2 \ldots p_k \pi_1 \overline{\pi_1} \pi_2 \overline{\pi_2} \ldots \pi_l \overline{\pi_l},$$

где p_1, p_2, ..., p_k – целые рациональные простые, а π_1 и $\overline{\pi_1}$, π_2 и $\overline{\pi_2}$, ..., π_l и $\overline{\pi_l}$ – пары комплексно сопряженных простых гауссовых чисел.

б) Докажите, что рациональное простое число вида $4k + 3$ является простым и в $\mathbb{Z}[i]$.

в) Докажите, что для любого рационального простого числа p вида $4k + 1$ существует гауссово число α, не кратное p и такое, что $N\alpha$ делится на p.

г) Докажите, что рациональное простое число вида $4k + 1$ раскладывается в произведение двух комплексно сопряженных простых гауссовых чисел: $p = \pi\overline{\pi}$.

д) Докажите, что натуральное число представляется в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда все простые числа вида $4k + 3$ входят в его разложение на простые множители в четных степенях.

е) Докажите, что число решений уравнения $x^2 + y^2 = N$ в целых числах равно учетверенной разности количества делителей N вида $4k + 1$ и количества делителей N вида $4k + 3$ (в частности, это означает, что количество первых всегда не меньше количества вторых).

7. По плоскости с равными постоянными скоростями по попарно непараллельным прямым ползут n черепашек. Докажите, что когда-нибудь они окажутся в вершинах правильного n-угольника.

6. Существуют ли такие многочлены $P(x), Q(x) \in \mathbb{C}[x]$, что $P(Q(x)) = (x - 1)(x - 2)\ldots(x - 15)$?

7. Пусть n – натуральное число, а p – простое, большее двух. Докажите, что многочлен $x^n + 2^p$ раскладывается на множители (степени не ниже 1) с целыми коэффициентами тогда и только тогда, когда n делится на p.

8. Решите в целых числах уравнение: а) $x^4 + y^4 = z^2$, б) $x^4 - y^4 = z^2$.

Серия 10(а), не без решеток

1. а) Решетка, являющаяся подмножеством решетки всех векторов с целыми координатами, вместе с каждым своим вектором содержит вектор, перпендикулярный ему и равный ему по длине. Докажите, что эта решетка подобна решетке всех целочисленных векторов.

б) У решетки Λ, основным параллелограммом которой является прямоугольник $1 \times \sqrt{5}$, выбрали подрешетку, которая вместе с каждым своим вектором содержит вектор, перпендикулярный ему и превосходящий его по длине в $\sqrt{5}$ раз. Верно ли, что эта подрешетка подобна исходной решетке?

2. Пусть $p > 2$ – простое число. Величину $D = b^2 - 4ac$ мы назовем *дискриминантом* сравнения $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p}$. Докажите, что это сравнение

а) при $D \equiv 0 \pmod{p}$ имеет единственный корень (двойной);

б) при $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$ имеет два различных корня, а при $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$ не имеет корней.

3. Докажите, что сравнение $x^3 \equiv a \pmod{p}$ при простом p и a, не кратном p

а) имеет 0 или 3 решения, если p имеет вид $6k + 1$;

б) имеет 1 решение, если p имеет вид $6k + 5$.

4. Докажите, что простых чисел вида $6k + 1$ бесконечно много.

5. Пусть $p = 8k + 1$ – простое число. Докажите, что:

а) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 8k \equiv (-1)^{2k}(4k)! \pmod{p}$;

б) 2 – квадратичный вычет mod$p$.

6. A – нечетное число, X и Y – корни уравнения $t^2+At-1=0$. Докажите, что при любом натуральном k X^k+Y^k и $X^{k+1}+Y^{k+1}$ – целые взаимно простые числа.

7. Пусть $a_1<a_2<\ldots$ – бесконечная последовательность целых чисел. Докажите, что в ней существует либо бесконечная подпоследовательность, любые два члена которой не кратны друг другу, либо бесконечная подпоследовательность, каждый член которой кратен предыдущему.

8. а) Множество всех целых чисел разбито на попарно непересекающиеся бесконечные арифметические прогрессии с положительными разностями d_1, d_2, d_3, $\ldots$, d_n. Докажите, что $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\ldots+\frac{1}{d_n}=1$.

б) Верно ли это утверждение, если число прогрессий бесконечно?

9. Найдите остаток от деления $x^{1959}-1$ на $(x^2+1)(x^2+x+1)$.

Серия 11(а): небольшая добавочная

1. Пусть a, b, c, d – такие целые числа, что система уравнений $ax+by=m$, $cx+dy=n$ при любых целых m и n имеет решение в целых числах. Докажите, что $ad-bc=\pm1$.

2. а) (Теорема Дюма) Докажите, что диаграмма Ньютона многочлена FG по модулю p является суммой Минковского диаграмм Ньютона многочленов F и G.

б) (признак Дюма) Докажите, что многочлен, диаграмма Ньютона которого по какому-нибудь простому модулю состоит из одного простого звена (то есть отрезка, не содержащего внутри целых точек), неприводим.

3. (Grace) Пусть $p=4k+1$ – простое число и $a^2\equiv-1 \pmod p$. Рассмотрим решетку $\Lambda\subset\mathbf{Z}^2$: $\Lambda=\{(x,y)|x+ay \mathrel{\vdots} p\}$.

а) Найдите площадь основного параллелограмма этой решетки.

б) Докажите (с помощью п. а)), что p является суммой двух точных квадратов.

4. Найдите все действительные числа $a\in(-2,2)$, для которых многочлен $x^{154}-ax^{77}+1$ делится на многочлен $x^{14}-ax^7+1$.