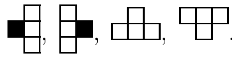
Вступительная олимпиада, 3 августа 2011 г.

1. Дано число 188188...188 (число 188 написано 101 раз). Некоторые цифры этого числа вычеркнули. Какое наибольшее число, кратное 7, могло получиться?

2. Докажите, что при всех $x, y \in [0;1]$ выполняется неравенство $5(x^2+y^2)^2 \leqslant 4+(x+y)^4$.

3. По окружности расставлены в некотором порядке числа от 1 до 100. Назовем пару чисел *хорошей*, если эти два числа не стоят рядом, и хотя бы на одной из двух дуг, на которые они разбивают окружность, все числа меньше каждого из них. Чему может равняться общее количество хороших пар?

4. Точка M — середина основания BC трапеции $ABCD$. На основании AD выбрана точка P. Прямая PM пересекает прямую CD в точке Q, причем C лежит между Q и D. Перпендикуляр к основаниям, проведенный через точку P, пересекает прямую BQ в точке K. Докажите, что $\angle QBC = \angle KDA$.

5. Квадрат 600×600 разбит на фигурки из 4 клеток вида . В фигурках первых двух типов в закрашенных клетках записано число 2^k, где k — номер столбца, в котором находится эта клетка. Докажите, что сумма всех записанных чисел делится на 9.

6. Есть 30 карточек, на каждой из которых написано вещественное число (эти числа не обязательно различны). Карточки разбили на пары, и оказалось, что сумма чисел в каждой паре равна 1. Потом карточки разбили на пары другим способом, и оказалось, что во всех парах, кроме одной, произведение чисел равно 1. Докажите, что и в оставшейся паре произведение чисел равно 1.

7. На продолжении стороны AC (за точку A) остроугольного треугольника ABC отмечена точка D, а на продолжении стороны BC (за точку C) отмечена точка E, причем $AD = CE$. Известно, что $2\angle A = \angle C$. Докажите, что $\angle CDE < (\angle ABD + \angle BAC)/2$.

8. Дано натуральное число n. На доске выписаны все натуральные числа от $900\ldots00$ до $1200\ldots00$ (оба числа оканчиваются на n нулей). У каждого из них выбрали делитель, меньший его самого. Докажите, что хотя бы два из этих делителей совпадают.

Серия 1, векторно-арифметическая

1. Докажите, что отношение эквивалентности направленных отрезков транзитивно.

2. а) AM – медиана треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$.

б) Докажите с помощью векторов, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

3. Найдите все четные $a > 1$, обладающие следующим свойством: если a делится на простое число p, то $a-1$ делится на $p-1$.

4. Докажите, что сумма цифр числа 1981^n не меньше 19 при любом натуральном n.

5. Докажите, что сумма двух последовательных простых чисел, больших 2, раскладывается на три сомножителя, больших 1.

6. Пусть $p_1 = 2$, p_{n+1} – наибольший простой делитель числа $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$. Докажите, что в этой последовательности нет пятерок.

7. Даны натуральные числа m и n. Докажите, что если при бесконечно многих натуральных k число $k^2+2kn+m^2$ является точным квадратом, то $m = n$.

8. Даны положительные числа a, b, c и d. Докажите, что если $cd = 1$, то на отрезке с концами ab и $(a+c)(b+d)$ найдется по крайней мере один квадрат целого числа.

Серия 2: векторы II

1. Сумма четырех единичных векторов равна нулю. Докажите, что среди них найдутся два противоположных.

2. A, B, C, D, O – пять точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что если $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$, то $ABCD$ – параллелограмм.

3. M, N, P, Q – середины сторон AB, BC, CD и DE выпуклого пятиугольника $ABCDE$; F – середина MP, G – середина NQ. Докажите, что отрезок FG параллелен отрезку AE и имеет вчетверо меньшую длину, а) с помощью векторов, б) без помощи векторов.

4. При каких натуральных n число n^4+n^2+1 – простое?

5. Найдите все 2011-значные числа такие, что все числа, полученное из них перестановкой цифр, делятся на 7.

6. Решите а) в натуральных, б) в целых числах уравнение $a(a+1) = b(b+2)$.

7. Найдите наименьшее значение выражения а) $|9^k - 5^l|$, б) $|11^k - 5^l|$, в) $|36^k - 5^l|$ при натуральных k и l.

8. Решите а) в натуральных, б) в целых числах уравнение $x^n = y(y+1)$.

Серия 3, с полезными формулами

1. Докажите формулу для площади треугольника: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

2. Докажите **теорему синусов**: в треугольнике $a = 2R\sin\alpha$.

3. Докажите, что если векторы $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ перпендикулярны, то $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$.

4. Решите в натуральных числах уравнение $4x^3 - x = y^2$.

5. При каких натуральных n а) $5^n - 1$ делится на $4^n - 1$? б) $7^n - 1$ делится на $6^n - 1$?

6. Может ли точный квадрат иметь поровну натуральных делителей вида $3k+1$ и $3k+2$?

7. Найдите вое такие простые числа p, что для каждого из них число $2p+1$ является точным кубом натурального числа.

8. Докажите, что уравнение $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$ не имеет решений в целых числах, отличных от решения $x = y = z = 0$.

Серия 4: формулы сложения без единого гвоздя.

1. Докажите, что сумма векторов, идущих из центра правильного n-угольника в его вершины, равна $\overrightarrow{0}$.

2. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

3. Высота h_c треугольника образует со стороной a угол α, а со стороной b – угол β. Докажите, что: а) $\sin(\alpha+\beta) = \frac{ch_c}{ab}$; б) $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{ch_c}{ab}$; в) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

4. Докажите, что в треугольнике а) $a = b\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\beta$. б) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

5. Даны 8 действительных чисел: a, b, c, d, e, f, g, h. Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac+bd$, $ae+bf$, $ag+bh$, $ce+df$, $cg+dh$, $eg+fh$ неотрицательно.

6. Докажите, что уравнение $x!+a = y^2$ имеет конечное число натуральных решений а) при $a = 2011$; б) при $a = 2006$; в) при любом a, не являющемся точным квадратом.

7. Докажите, что число $222\ldots22$ (1982 двойки) нельзя представить в виде $XY(X+Y)$, где X и Y – целые числа.

8. Найдите все натуральные n, для которых а) $2^n + 65$ – точный квадрат; б) $3^n + 55$ – точный квадрат.

9. Число 4 обладает тем свойством, что при делении его на q^2 получается остаток меньше $q^2/2$, каково бы ни было q. Перечислите все числа, обладающие этим свойством.

Серия 5, с разной арифметикой

1. Докажите, что $\sin^6 x + \cos^6 x \geqslant \frac{1}{4}$.

2. В круг радиуса 3 поместили несколько кругов с суммой радиусов 25. Докажите, что найдется прямая, пересекающая не менее 9 из них.

3. Докажите, что число $1981^{1986} + 30^{1986}$ не является точным квадратом.

4. Докажите, что совершенное число (т.е. число, равное сумме всех своих натуральных делителей, за исключением его самого) не может быть точным квадратом.

5. Даны два целых положительных числа m и n. Выписываются все различные делители числа m – числа a, b, $\ldots$, k – и все различные делители числа n – числа s, t, $\ldots$, z. Оказалось, что $a+b+\ldots+k = s+t+\ldots+z$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{k} = \frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\ldots+\frac{1}{z}$. Докажите, что $m = n$.

6. Докажите, что уравнение $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$ не имеет решений в целых числах, отличных от 0.

7. При каких натуральных k число вида $101010\ldots101$, составленное из k нулей и $k+1$ единиц, – простое?

8. Число $(\sqrt{13}-1)^{2000}$ представлено в виде $a + b\sqrt{13}$, где a и b - целые числа. Докажите, что a и b делятся на 2^{1999}.

9. Дано N чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n, каждое из которых равно $+1$ или -1. При этом $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$. Докажите, что N делится на четыре.

Серия 6: ...и графы.

1. Решите а) в натуральных, б) в целых числах уравнение $y^2 = x^2 + x + 1$.

2. а) $2^n - 2$ делится на n. Докажите, что $2^{2^n-1} - 2$ делится на $2^n - 1$.

б) последовательность натуральных чисел $\{a_k\}$ определена рекуррентно: a_1 – простое, $a_k = 2^{a_{k-1}} - 1$. Докажите, что $2^{a_k} - 2$ делится на a_k при всех натуральных k.

3. A, B, C, D, E, F – произвольные точки. Докажите, что $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$.

4. На плоскости дано 1980 векторов, причем среди них есть не коллинеарные. Известно, что сумма любых 1979 векторов коллинеарна с вектором, не включенным в сумму. Докажите, что сумма всех 1980 векторов равна нулевому вектору.

5. Найдите $2\sin^2 10^\circ + \sin 70^\circ$.

6. В классе 17 учеников. Известно, что среди любых трех учеников найдутся хотя бы два друга. Доказать, что в классе есть ученик, у которого не менее 8 друзей.

7. Усадьбы каждых двух из 30 джентльменов графства Липшир соединены дорогой. В целях экономии несколько дорог решено закрыть. Каким наибольшим количеством дорог можно пожертвовать с тем, чтобы при любом выборе такого количества дорог для закрытия по оставшимся дорогам из любой усадьбы можно было проехать в любую другую?

8. В графстве имеется 1000 коттеджей, в каждом из которых живет по одному джентльмену. В один прекрасный день каждый джентльмен переезжает из своего дома в какой-либо другой (переезд осуществляется так, что после него в каждом доме живет один джентльмен). Доказать, что после переезда можно так покрасить все 1000 коттеджей синей, зеленой и красной красками, чтобы у каждого хозяина цвет его нового дома отличался от цвета старого дома.

9. Эксцентричный джентльмен мистер Доджсон построил в саду модель графства Липшир под названием "Зазеркалье". Если две усадьбы в графстве соединены дорогой, то в Зазеркалье — нет, и наоборот. Из усадьбы A нельзя проехать в усадьбу B, заехав по дороге менее, чем к двум джентльменам. Докажите, что в Зазеркалье можно проехать из любой усадьбы в любую, заехав по дороге не более, чем в две чужих усадьбы.

Серия 7: напоминание о векторах

1. $z + \frac{1}{z} = 1$. Найдите $z^n + \frac{1}{z^n}$ при всех натуральных n.

2. На плоскости дано несколько точек. Для некоторых пар A, B этих точек взяты векторы $\overrightarrow{AB}$, причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\overrightarrow{0}$.

3. На плоскости дано $2n$ векторов, ведущих из центра правильного $2n$-угольника в его вершины. Сколько из них нужно взять, чтобы их сумма имела максимальную длину?

4. Докажите, что в треугольнике $S^2 = rr_ar_br_c$.

5. Докажите, что на ребрах тетраэдра нельзя расставить стрелки так, чтобы сумма образовавшихся векторов равнялась $\overrightarrow{0}$.

6. Несколько школьников построились в шеренгу. Оказалось, что у каждого школьника, кроме двух крайних, поровну знакомых слева и справа от него. Докажите, что у двух крайних школьников поровну знакомых.

7. В n-элементном множестве M выбрано n различных подмножеств $A_1, \ldots, A_n$. Докажите, что для некоторого $x \in M$ множества $A_1 \cup \{x\}, \ldots, A_n \cup \{x\}$ также различны.

8. В группе из n^2 человек каждый имеет не более n знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать n человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.

9. a и b – натуральные числа, $a > b \geqslant 2$. Докажите, что если при каждом $k = 1, 2, \ldots, a-b$ числа $a+k$ и $b+k$ взаимно просты, то a и b – последовательные числа.

Серия 8, про делимость

1. Точки A_1, B_1, C_1 расположены соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке K. Докажите, что

а) $\frac{A_1K}{AA_1} + \frac{B_1K}{BB_1} + \frac{C_1K}{CC_1} = 1$; б) $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = 2\frac{A_1K}{AK} \cdot \frac{B_1K}{BK} \cdot \frac{C_1K}{CK}$.

2. Землемер К. задумал натуральное число и нашел его остатки при делении на 3, 6 и 9. Сумма этих остатков оказалась равна 15. Найдите остаток от деления задуманного числа на 18.

3. У всех граней многогранника, кроме одной, число сторон делится на k. Докажите, что грани этого многогранника нельзя покрасить в два цвета так, чтобы соседние по ребру грани были разного цвета.

4. Докажите, что $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc}$ делится на 99 для любых цифр a, b, c, d.

5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 получают все возможные семизначные перестановки. Докажите, что ни одно из полученных чисел не делится на другое.

6. Докажите, что если $a^2 + ab + b^2$ делится на $a+b$, то $a^4 + b^4$ делится на $(a+b)^2$.

7. Существует ли 100 натуральных чисел, любые 2 из которых имеют общий делитель, больший 1, а все вместе – нет?

8. Каждое из натуральных чисел a, b, c и d делится на натуральное число $ab - cd$. Докажите, что $ab - cd = 1$.

Серия 9, с более содержательной арифметикой

1. Множество целых чисел I обладает следующими свойствами:

(i) для каждых элементов a и b множества I их сумма $a+b$ также принадлежит I;

(ii) для каждого элемента a множества I все его кратные (то есть все числа вида na с $n \in \mathbb{Z}$ тоже принадлежат I.

Докажите, что I является множеством всех кратных некоторого целого числа d.

2. (Наверное, эта задача должна была стоять на месте 8.1) На отрезке AA_1, соединяющем вершину треугольника ABC с точкой на противоположной стороне, отмечена точка O. Докажите, что $\frac{S_{ABOC}}{S_{ABC}} = \frac{AO}{AA_1}$.

3. Докажите, что при натуральном $m > 3$ $\sum\limits_{\substack{1 \leqslant x \leqslant m \\ x^2 - x + 1 \,\vdots\, m}} x$ делится на $m+1$.

4. а) $(\sqrt{2}+1)^7 = \sqrt{57122} + \sqrt{57121}$. Докажите, что $(\sqrt{2}-1)^7 = \sqrt{57122} - \sqrt{57121}$..

б) Пусть $(\sqrt{2}+1)^n = a + b\sqrt{2}$. Докажите,что $(1-\sqrt{2})^n = a - b\sqrt{2}$..

5. Докажите, что для каждого натурального n существует натуральное k такое, что $(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.

6. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ больше 1, не превосходят $4n(n-1)$ и попарно взаимно просты. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел – простое.

7. Решите уравнение $x^2 + y^3 = z^4$ в простых числах.

8. Найдите все пары натуральных чисел m и n такие, что $m^2 + n$ и $n^2 + m$ — точные квадраты.

Серия 10, с приведенными в систему знаниями

1. Докажите, что если у натурального N

а) нет простых делителей, не превосходящих $\sqrt{N}$, то N – простое;

б) нет простых делителей, не превосходящих $\sqrt[3]{N}$, то любой собственный делитель N прост.

2. Простые числа p, q и натуральное число n удовлеряют соотношению $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} = \frac{1}{n}$. Найдите эти числа.

3. Решите в целых числах уравнение $x^2 - 5xy + 4y^2 = 101$.

4. Решите в натуральных числах уравнение $x^3 + 3 = 4y(y+1)$.

5. Докажите, что

а) n-е простое число $p_n < 2^{2^n}$;

б) при $n \geqslant 2$ существует простое p, для которого $n \leqslant p \leqslant n!$.

6. Обозначим $\pi(N)$ количество простых чисел, не превышающих N. Решите уравнение $\pi(N) + \pi(2N) = N$.

7. Пусть p_n – n-е простое число, а $\pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих n. Докажите, что каждое натуральное число представляется ровно в одном из видов $n + p_n - 1$ или $n + \pi(n)$.

8. Точку внутри правильного а) шестиугольника, б) $2k$-угольника соединили с его вершинами. Докажите, что на полученных отрезках можно расставить стрелки так, чтобы сумма образовавшихся векторов была равна $\overrightarrow{0}$.

9. Докажите формулу для площади треугольника: $S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

Серия 11, про наибольший общий делитель и всё такое

1. Остап Бендер организовал в городе Фуксе раздачу слонов населению. На раздачу явилось 28 членов профсоюза и 37 не членов, причем Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну не членам. Оказалось, что

существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О.Бендера?

2. Докажите, что $[a,b](a,b)=ab$ при всех натуральных a и b.

3. Докажите, что ни при каком целом n выражение n^2+3n+5 не делится на 121.

4. Найдите $(\underbrace{111\ldots111}_{m\text{ единиц}}, \underbrace{111\ldots111}_{n\text{ единиц}})$.

5. $(1+\sqrt{2})^{2001}=a+b\sqrt{2}$, где a и b – целые числа. Докажите, что $(a,b)=1$.

6. a, b, c, d — натуральные числа, $ab=cd$.

а) Докажите, что существуют натуральные числа u_1, v_1, u_2, v_2, для которых $a=u_1v_1$, $b=u_2v_2$, $c=u_1u_2$, $d=v_1v_2$.

б) Докажите, что число $a+b+c+d$ — составное.

7. Пусть $f(x)=x^2-x+1$. Докажите, что для любого натурального m числа m, $f(m)$, $f(f(m))$, … попарно взаимно просты.

8. На плоскости расположены два равносторонних треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, вершины которых занумерованы по часовой стрелке. Из произвольной точки O отложены векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, равные соответственно векторам $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$. Докажите, что точки A, B, C также являются вершинами равностороннего треугольника.

9. Пять комплексных чисел c_1, c_2, c_3, c_4 и c_5 связаны соотношением $\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}+\frac{1}{c_4}+\frac{1}{c_5}=0$. Докажите, что если точки плоскости, изображающие комплексные числа c_1, c_2, c_3, c_4 и c_5, лежат в вершинах выпуклого пятиугольника, то точка 0 находится внутри этого пятиугольника.

Математический бой младшая группа – Петербург, 19 августа 2011 г., вариант А

1. В клетках прямоугольника 5×9 стоят 33 фишки. Ход состоит в том, что все фишки одновременно сдвигаются так, чтобы каждая фишка оказалась на клетке, соседней с исходной. При этом запрещается ставить две фишки на одну клетку (в том числе и в начальной позиции). Кроме того, если какая-то фишка передвинулась по горизонтали, то в следующий ход она должна передвигаться по вертикали, и наоборот. Докажите, что по этим правилам невозможно сделать подряд 100 ходов.

2. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали AD, BE и CF равны и пересекаются в одной точке. Оказалось, что $AB=DE$, а $BC=EF$. Докажите, что $CD=FA$.

3. Можно ли отметить 2011 число так, чтобы для любого отмеченного числа x число $3x^2-2$ тоже было отмеченным?

4. Докажите, что для положительных чисел x, y, z, произведение которых равно 1, выполнено неравенство $(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2>(x+y+z)^3$.

5. При каких натуральных k, больших 2, но меньших 50, существует число, которое является суммой k идущих подряд натуральных чисел, но не является суммой m идущих подряд натуральных чисел при любом m от 2 до $k-1$?

6. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из первых 2001 натуральных чисел так, чтобы не было выбрано никакое произведение двух из выбранных чисел?

7. В треугольнике ABC $\angle B=120^\circ$. BL — биссектриса этого треугольника. K и M — основания перпендикуляров, опущенных из точки L на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что $2KM<AC$.

8. В группе из 100 людей среди любых троих есть человек, знающих обоих других. Докажите, что из этой группы можно выбрать компанию из 50 человек, в которой все знакомы друг с другом.

9. Можно ли вырезать из клетчатой бумаги 16 прямоугольников так, чтобы из них можно составить любой клетчатый прямоугольник, обе стороны которого не больше 15?

10. Дано натуральное число b. Найдите наименьшее натуральное число $a>b$ такое, что $(a,b)=1$ и a^2+a+b делится на b^2.

Математический бой младшая группа – Петербург, 19 августа 2011 г., вариант В

1. В выпуклом пятиугольнике все диагонали равны, а также равны четыре подряд идущие стороны. Докажите, что все его стороны равны.

2. ЭВМ "Пентюх-6" по вставленным в нее карточкам с ненулевыми числами a и b выводит карточку с числом $1-\frac{a}{b}$ и возвращает обе вставленные карточки. Как, имея карточки с числами p и q, получить карточку с числом $\frac{p}{q}$?

3. На прямой в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D ($AB\neq CD$). По одну сторону от этой прямой построены равносторонние треугольники ABX, BCY и CDZ. Оказалось, что $XY=YZ$. Найдите углы треугольника XYZ.

4. Дан выпуклый семиугольник. Докажите, что одну из его вершин можно удалить таким образом, чтобы никакие три диагонали, соединяющие оставшиеся вершины, не имели общей внутренней точки.

5. Множество натуральных чисел разбито на непересекающиеся множества N_1 и N_2 такие, что разность чисел, лежащих в одном множестве, не является простым числом, большим 100. Найдите все такие разбиения.

6. Числа x_1, x_2, x_3, …, x_{10} получены перестановкой чисел 1, 2, …10. Докажите, что $x_1+2x_2+3x_3+\ldots+10x_{10}\geqslant 165$.

7. Клетчатый квадрат 16×16 разрезан на доминошки (прямоугольники 1×2). Докажите, что найдется прямая, идущая по линиям сетки и рассекающая пополам не меньше шести доминошек.

8. Что больше: сумма пятых степеней натуральных чисел от 1 до 10000 или сумма десятых степеней натуральных чисел от 1 до 100?

Серия 12, которую нужно решить быстро

Задачи 1–4 должны быть решены с помощью масс, а задача 5 – без них. Задачи 2 и 4 будут разобраны утром 22 августа.

1. а) В вершинах A, B, C, D параллелограмма $ABCD$ помещены соответственно массы p, q, p, q. Докажите, что центром этих масс служит центр параллелограмма.

б) В вершинах параллелограмма $ABCD$ расположены такие массы m_A, m_B, m_C, m_D, что центр получающихся четырех материальных точек совпадает с центром параллелограмма. Докажите, что $m_A = m_C$, $m_B = m_D$.

2. Докажите теорему Чевы.

3. Докажите теорему Ван-Обеля.

4. Внутри треугольника ABC лежит точка O. Докажите, что она является центром масс, численно равных площадям треугольников OBC, OCA, OAB, помещенных соответственно в точки A, B, C.

5. (Менелай Александрийский, ок.100 до н.э.) Точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC или на их продолжениях. Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, то $AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = AC_1 \cdot CB_1 \cdot BA_1$.

6. $p = 4k+1$ – простое число. Докажите, что $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv -1 \pmod p$.

7. Найдите $(2^m-1, 2^n-1)$ при всех натуральных m и n.

8. Докажите, что если число 2^p-1 — простое, то число $2^{p-1}(2^p-1)$ — совершенное.

9. Докажите, что число $n!$: а) не делится на 2^n; б) не делится на p^n ни при каком простом p.

Серия 13. Теперь мы знаем ВСЁ!

В задачах 1 и 2 $\overline{AB}$ обозначает ориентированный отрезок.

1. (теорема Чевы, полная версия). Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на прямых BC, AC и AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\overline{AB_1} \cdot \overline{BC_1} \cdot \overline{CA_1} = \overline{C_1A} \cdot \overline{B_1C} \cdot \overline{A_1B}$.

2. (теорема Менелая, полная версия) Точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC или на их продолжениях. Докажите, что

а) если точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, то $\overline{AB_1} \cdot \overline{BC_1} \cdot \overline{CA_1} = \overline{AC_1} \cdot \overline{CB_1} \cdot \overline{BA_1}$.

б) если $\overline{AB_1} \cdot \overline{BC_1} \cdot \overline{CA_1} = \overline{AC_1} \cdot \overline{CB_1} \cdot \overline{BA_1}$, то точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

3. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 – середины сторон шестиугольника (в порядке обхода). Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ совпадают.

4. Докажите, что

а) (точка Жергонна) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон, пересекаются в одной точке;

б) (точка Нагеля) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вневписанные окружности касаются противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

5. Докажите, что $\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]} = \frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}$.

6. Докажите, что при любом натуральном n $\quad \sqrt{n} \leqslant \frac{\sigma(n)}{d(n)} < \frac{3}{4}n$.

7. Натуральные числа x, y, z удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=z^2$. Докажите, что

а) xyz делится на 60;

б) если (x,y,z) – *примитивное решение* (т.е. $(x,y,z)=1$), то для некоторых натуральных u и v разной четности, $u>v$, $(u,v)=1$, либо $x=u^2-v^2, y=2uv, z=u^2+v^2$, либо $x=2uv, y=u^2-v^2, z=u^2+v^2$.

8. a – целое число, $(a,561)=1$. Докажите, что $a^{560} \equiv 1 \pmod{561}$.

9. Докажите, что для различных натуральных m и n $(2^{2^m}+1, 2^{2^n}+1)=1$.

Серия 14, опять в спешке

Задача 14.1 будет разобрана утром 24 августа.

1. Продолжения сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке W, а X и Y – середины диагоналей AC и BD. Докажите, что площадь треугольника WXY равна одной четверти площади четырехугольника $ABCD$.

2. Отрезки, соединяющие точку внутри выпуклого n-угольника с его вершинами, образуют со сторонами n-угольника углы α_1 и β_1, α_2 и $\beta_2, \ldots,$, α_n и β_n соответственно. Докажите, что $\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_n = \sin\beta_1 \sin\beta_2 \ldots \sin\beta_n$.

3. (Тригонометрическая форма теоремы Чевы). Докажите, что лучи, выходящие из вершин треугольника и разбивающие его углы на углы α_1 и β_1, α_2 и β_2, α_3 и β_3 соответственно, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 = \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3$.

4. A_1, B_1, C_1 – точки на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC соответственно. Докажите, что

а) если перпендикуляры к сторонам, восставленные в этих точках, пересекаются в одной точке, то $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2$.

б) если $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2$, то перпендикуляры к сторонам, восставленные в этих точках, пересекаются в одной точке.

5. Докажите, что для каждого простого p существуют такие целые x и y, что x^2+y^2+1 делится на p.

6. Натуральные числа y и z удовлетворяют соотношению $y^3+4y=z^2$. Докажите, что y есть удвоенный квадрат.

7. Целое число a таково. что число $3a$ представляется в виде x^2+2y^2, где x и y – целые числа. Докажите, что и число a представимо в таком же виде.

8. Докажите, что при любом натуральном n $\quad (5n)!$ делится на $(n!)^5$.

9. Решите уравнение в натуральных числах: $105^x + 211^y = 106^z$.

Заключительная олимпиада, 25 августа 2011 г.

1. Существует ли двадцатизначное натуральное число такое, что если его цифры записать в обратном порядке, то полученное число будет ровно в три раза больше первоначального?

2. Все клетки доски 10×10 покрашены в белый цвет. Федя и Юра по очереди (начинает Федя) перекрашивают по одной белой клетке в черный цвет. Проигрывает тот, после чьего хода на доске не останется двух соседних по стороне белых клеток. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Найдите все натуральные x, для которых $3x+1$ и $6x-2$ – точные квадраты, а число $6x^2-1$ — простое.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH. Оказалось, что $AH = BC$. Докажите, что биссектриса угла B, высота, опущенная из вершины A, и прямая, проходящая через точку H и параллельная стороне BC, пересекаются в одной точке.

5. На концерт пришли 125 человек, причем каждый был знаком ровно с 10 другими. В перерыве некоторые слушатели ушли. Оказалось, что все оставшиеся по-прежнему имеют в зале одинаковое количество знакомых. Докажите, что среди ушедших были знакомые друг с другом.

6. Даны натуральные числа a, b и c, ни одно из которых не является делителем другого. Известно, что $(a,b)+[a,b] = (a,c)+[a,c]+1$. Докажите, что $c < b \leqslant \frac{3}{2}c$.

7. На клетчатой бумаге нарисован треугольник, вершины которого лежат в узлах, а стороны не идут по линиям сетки. Каждая клетка разбита на 4 одинаковых квадратика, левый верхний из которых окрашен в красный цвет, а правый нижний — в синий. Докажите, что в треугольнике красный и синий цвета занимают одинаковую площадь.

8. Фальшивомонетчик изготовил 90 фальшивых монет, весящих по 9 грамм, и по неосторожности добавил к ним 10 настоящих, весящих по 10 грамм. Монеты перемешались, и он не может отличить одни от других. У него есть весы, которые позволяют взвесить любое количество монет, но выдают либо точный вес, либо вес, на 1 грамм больший истинного. Может ли он с помощью этих весов гарантированно найти хотя бы одну фальшивую монету?