Вступительная олимпиада для выпускников 9–10 классов, 3 августа 2011 г.

1. Можно ли раскрасить плоскость в 2011 цветов так, чтобы внутри любого круга были точки всех 2011 цветов?

2. Вдоль прямого шоссе Тмутаракань – Урюпинск в точках A_1, A_2, …, A_{100} стоят вышки оператора сотовой связи ДПС, а в точках B_1, B_2, …, B_{100} – вышки компании "Рупор". (Нумерация вышек может не совпадать с порядком их расположения вдоль шоссе.) Каждая вышка действует на расстоянии 10 км в обе стороны вдоль шоссе. Известно, что $A_iA_k \geqslant B_iB_k$ при любых i, $k \leqslant 100$. Докажите, что суммарная длина всех участков шоссе, охваченных сетью ДПС, не меньше, чем длина участков, охваченных сетью "Рупор".

3. Точки X и Y – середины сторон AB и AC треугольника ABC, I – центр его вписанной окружности, K – точка касания вписанной окружности со стороной BC. Биссектриса внешнего угла при вершине B пересекает прямую XY в точке P, а биссектриса внешнего угла при вершине C пересекает XY в точке Q. Докажите, что площадь четырехугольника $PKQI$ равна половине площади исходного треугольника.

4. Шесть членов команды Фаталии на Международной математической олимпиаде отбираются из 13 кандидатов. На отборочной олимпиаде кандидаты набрали a_1, a_2, …, a_{13} баллов ($a_i \neq a_j$ при $i \neq j$).

Руководитель команды заранее выбрал 6 кандидатов и теперь хочет, чтобы в команду попали именно они. С этой целью он подбирает многочлен $P(x)$ и вычисляет *творческий потенциал* каждого кандидата по формуле $c_i = P(a_i)$. При каком минимальном n он заведомо сможет подобрать такой многочлен $P(x)$ степени не выше n, что творческий потенциал любого из его шести кандидатов окажется строго больше, чем у каждого из семи оставшихся?

5. Организаторы математического конгресса обнаружили, что, если любого из участников поселить в одноместный номер, то всех остальных можно будет расселить по двухместным номерам, в каждом из которых обитатели будут знакомы друг с другом.

Докажите, что любой участник может организовать круглый стол по теории графов, в котором, кроме него, будет участвовать еще четное число людей, и каждый участник будет знаком с обоими своими соседями по столу.

6. Натуральные n, m, k таковы, что числа $5^n - 2$ и $2^k - 5$ делятся на $5^m - 2^m$. Докажите, что n и m взаимно просты.

7. В треугольнике ABC стороны попарно различны. На лучах AB и CB отмечены точки B_1 и B_2 так, что $AB_1 = CB$, $CB_2 = AB$. На лучах CA и BA отмечены точки A_1 и A_2 так, что $CA_1 = BA$, $BA_2 = CA$. На лучах BC и AC отмечены точки C_1 и C_2 так, что $BC_1 = AC$, $AC_2 = BC$. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

8. Две несократимые дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{m}{n}$ представили в десятичной записи. Среди разрядов после запятой с номерами от 500 000 до 1 000 000 оказалось менее 5 000 разрядов, в которых цифры этих дробей не совпадают, но хотя бы один такой разряд есть. Докажите, что знаменатель одной из этих дробей больше 10^{50}.

Серия 1, с показателями

1. Найдите все пары (p, q) простых чисел такие, что число $2^p - 1$ делится на q, и среди простых делителей числа $q - 1$ имеются только числа 2, 3, 5 и 7.

2. Найдите все целые неотрицательные числа η, α, β, $\eta \neq 0$, такие, что $(\eta^\beta - 1) \,\vdots\, (\eta^\alpha + 1)$.

3. Докажите, что число а) $91! \cdot 1919! - 1$, б) $92! \cdot 1918! + 1$ делится на 2011.

4. Натуральный ряд представлен в виде объединения некоторого множества попарно непересекающихся целочисленных бесконечных арифметических прогрессий с разностями d_1, d_2, d_3, …. Может ли случиться, что при этом сумма $1/d_1 + 1/d_2 + 1/d_3 + \ldots$ не превышает 0,9, если а) общее число прогрессий конечно; б) прогрессий бесконечное число?

5. Даны 1989 различных натуральных чисел. Докажите, что некоторая бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой не больше ее разности, содержит ровно 3 или 4 данных числа.

6. Найдите все решения уравнения $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$ в рациональных числах x, y, z.

7. На фестиваль военно-морской песни приглашены хоры из 100 стран. Каждый хор должен исполнить три песни и сразу уехать домой. Ознакомившись с текстами песен, организаторы обнаружили, что каждая песня оскорбительна для одной из участвующих стран. Докажите, что они могут назначить порядок выступлений таким образом, чтобы никому не пришлось выслушивать больше трех оскорбительных для его страны песен.

8. Дан выпуклый 100-угольник $A_1A_2\ldots A_{100}$. Его разбили на треугольники не пересекающимися по внутренним точкам диагоналями. Докажите, что эти треугольники можно единственным образом занумеровать числами 1, 2, …, 98 таким образом, чтобы каждый треугольник с номером i содержал вершину A_i.

Серия 2. Исполнение всех ваших желаний.

1. Докажите, что а) если число $2^p - 1$ — простое, то число $2^{p-1}(2^p - 1)$ — совершенное; б) любое четное совершенное число имеет вид $2^{p-1}(2^p - 1)$ с простым множителем $2^p - 1$.

2. Докажите, что у всякого натурального числа а) количество делителей вида $4k + 1$ не меньше, чем количество делителей вида $4k + 3$; б) количество делителей, десятичная запись которых оканчивается на 1 или 9, не меньше, чем количество делителей, десятичная запись которых оканчивается на 3 или 7.

3. Дано натуральное число N. Выпишем все его делители $d_1, d_2, \ldots, d_n$, для каждого из них найдем, сколько делителей оно имеет. Докажите, что для полученных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполняется равенство $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3$.

4. Докажите, что существует 2011 последовательных натуральных чисел, каждое из которых делится на квадрат натурального числа, большего 1.

5. a и m – натуральные числа, x – целое число такое, что $a^2x - a$ делится на m. Докажите, что для некоторого целого y оба числа $a^2y - a$ и $ay^2 - y$ делятся на m.

6. Вершины выпуклого многоугольника с нечетным числом сторон окрасили в три цвета так, что любые две соседние вершины окрашены в разные цвета. Докажите, что многоугольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника цвета всех вершин были различны.

7. Докажите, что при $n > 2$ число $n!$ можно представить в виде суммы n различных его делителей.

8. Натуральное $n > 101$ делится на 101. Известно, что каждый делитель n, меньший n и больший 1, является разностью двух делителей n. Докажите, что n делится на 100.

Серия 3: арифметика, многочлены

1. Докажите, что все простые делители чисел Мерсенна $2^p - 1$ (p – простое) имеют вид $2kp + 1$ с некоторым натуральным k.

2. Докажите, что $2^n - 1$ не кратно n при натуральном $n > 1$.

3. Докажите, что уравнение $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$ не имеет решений в целых числах, отличных от 0.

4. Целые числа a, b, и c таковы, что числа $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ и $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$ тоже целые. Докажите, что $|a| = |b| = |c|$.

5. Докажите, что сумма кубов трех корней уравнения $x^3 + px + q = 0$ с целыми коэффициентами есть целое число, делящееся на 3.

6. Про положительные числа a, b, c, x, y, z известно, что $a < b < c$; $a \leqslant x < y < z \leqslant c$; $abc = xyz$; $a+b+c = x+y+z$. Докажите, что $a = x$, $b = y$, $c = z$.

7. Докажите, что

а) при простом $p > 2$ $\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$;

б) (теорема Вольстенхольма, 1862) при простом $p > 3$ $\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p^2}$.

8. (Битти, Банг) а) Докажите, что если последовательности $a_n = [n\alpha]$ и $b_n = [n\beta]$, $n \in \mathbb{N}$, не пересекаясь, покрывают весь натуральный ряд, то α и β иррациональны и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

б) Докажите, что если α и β иррациональны и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, то последовательности $a_n = [n\alpha]$ и $b_n = [n\beta]$, $n \in \mathbb{N}$, не пересекаясь, покрывают весь натуральный ряд.

Серия 4, последняя чисто арифметическая

1. Решите сравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{1987}$.

2. Пусть p, q – простые числа, $q > 5$. Докажите, что если $q | 2^p + 3^p$, то $q > p$.

3. а) (Эйлер) Докажите, что уравнение $4xy - x - y = z^2$ не имеет решений в натуральных числах x, y, z.

б) Докажите, что оно имеет бесконечно много решений в целых отрицательных числах x, y, z.

4. Докажите, что если числа $m, n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют равенству $2m^2 + m = 3n^2 + n$, то числа $m - n$, $2m + 2n + 1$, $3m + 3n + 1$ являются квадратами целых чисел.

5. Дано натуральное число n, a и b – его натуральные делители, причем $a < b$. Докажите, что выполняется следующее равенство: $\left[\frac{n}{a+1}\right] + \left[\frac{n}{a+2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{b}\right] = \left[\frac{n}{\frac{n}{b}+1}\right] + \left[\frac{n}{\frac{n}{b}+2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{\frac{n}{a}}\right]$.

6. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство $[\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}] + \ldots + [\sqrt[n]{n}] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \ldots + [\log_n n]$.

7. Решите в целых неотрицательных числах уравнение $5^x \cdot 7^y + 4 = 3^z$.

8. Докажите, что для каждого натурального n существует бесконечно много k таких, что $k \cdot 2^n - 7$ – точный квадрат.

9. Бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел содержит точный квадрат и точный куб. Докажите, что она содержит точную шестую степень а) если члены прогрессии взаимно просты с разностью; б) в общем случае.

Серия 5: те же и функциональные уравнения

1. **Определение.** *Ряд Фарея* Φ_n – последовательность расположенных по возрастанию несократимых дробей $\frac{a}{b}$ с $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$.

Медианта дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ – дробь $\frac{a+c}{b+d}$.

а) Докажите, что ряд Φ_n получается из ряда Φ_{n-1} вставкой медиант между соседними дробями с суммой знаменателей n.

б) Докажите, что для двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, стоящих рядом в каком-нибудь ряду Фарея, $|ad - bc| = 1$.

2. Докажите, что для некоторого натурального n число 2^n начинается цифрами 2011.

3. Докажите, что для любого иррационального ϑ последовательность $a_n = \{n\vartheta\}$ равномерно распределена в единичном интервале, то есть, если $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ и $F_N(\alpha, \beta)$ – количество номеров $n \leqslant N$ таких, что $\alpha \leqslant \{n\vartheta\} < \beta$, то $\frac{F_N(\alpha,\beta)}{N} \to \beta - \alpha$ при $N \to \infty$.

4. Докажите, что для нецелого $a > 1$ (причем $a \neq \sqrt[p]{q}$,, где p и q – натуральные числа) и натурального n выполняется равенство $[\log_a 2] + [\log_a 3] + \ldots + [\log_a k] + [a] + [a^2] + \ldots + [a^k] = kn$, где $k = [\log_a n]$ ($[x]$ – целая часть числа x).

5. Умножение всех элементов приведенной системы вычетов по простому модулю p на вычет $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ производит в ней перестановку.

а) Докажите, что если a – квадратичный вычет по модулю p, то получившаяся подстановка четна.

б) Докажите, что если a – квадратичный невычет по модулю p, то она нечетна.

6. Характер $\mathrm{mod}\, m$ – это не равная тождественно нулю функция $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ такая, что $\chi(a + m) = \chi(a)$ при всех целых a, $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ при всех целых a и b и $\chi(a) = 0$ при $(a, m) \neq 1$. Главный характер χ_0 задан равенством $\chi_0(a) = 1$ при $(a, m) = 1$.

а) Докажите, что характеров $\mathrm{mod}\, m$ конечное число. Их множество мы обозначим $\mathbb{Z}_m^*$.

б) Докажите, что $\sum\limits_{a \bmod m} \chi(a) = 0$ для любого неглавного характера χ.

в) Докажите, что $\sum\limits_{\chi \in \mathbb{Z}_m^*} \chi(a) = 0$ для любого $a \not\equiv 1 \pmod{m}$.

7. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая для всех $x \in R$ неравенству $f(x^2) - (f(x))^2 \geqslant 1/4$ и не принимающая никакое значение более чем в одной точке?

8. Функция F задана на всей вещественной оси, причем для любого x имеет место равенство: $F(x+1)F(x) + F(x+1) + 1 = 0$. Докажите, что функция F не может быть непрерывной.

9. Дано непустое множество G не равных постоянной функций действительного аргумента x вида $f(x) = ax + b$, где a и b – действительные числа, причем G удовлетворяет следующим условиям:

1) если $f, g \in G$, то $g \circ f \in G$, где $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, т.е. множество G замкнуто относительно суперпозиции;

2) если $f \in G$, где $f(x) = ax + b$, то обратная функция $f^{-1} \in G$, где $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$;

3) для любой $f \in G$ существует x_f такое,что $f(x_f) = x_f$.

Докажите, что существует действительное k такое, что $f(k) = k$ для всех $f \in G$.

Серия 6, с глупыми функциями

1. Пусть p и q – натуральные числа такие, что $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$. Докажите, что число p делится на 1979.

2. (Эйзенштейн, 1850) Докажите, что при простом $p > 2$

а) $\frac{2^p-2}{p} \equiv 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{p-1} \pmod p$;

б) $\frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{p-2}) \pmod p$.

3. Найдите все нечетные числа n такие, что $n \mid 3^n + 1$.

4. (А.А.Марков, 1879). Рассмотрим уравнение в натуральных числах $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$.

а) Найдите все его решения, в которых среди чисел x, y, z есть равные.

б) Докажите, что если в решении этого уравнения числа x, y, z различны, то любое из них можно заменить другим числом, получив другое решение уравнения.

5. В прекрасной книге "Сборник задач московских математических олимпиад" (под ред. А. А. Лемана) имеется следующая задача:

По бесконечной шахматной доске с полями в виде квадратов со стороной 1 прыгает блоха, перемещаясь за каждый прыжок на α вправо и на β вверх. Докажите, что если α, β и $\frac{\alpha}{\beta}$ иррациональны, то блоха обязательно когда-нибудь попадет на черное поле.

Как Вы думаете, верно ли это утверждение?

6. Функции $f(x) - x$ и $f(x^2) - x^6$ определены при всех положительных x и возрастают. Докажите, что функция $f(x^3) - \frac{\sqrt{3}}{2} - x^6$ также возрастает при всех положительных x.

7. Найдите все функции $f(x)$, определенные при всех положительных x, принимающие положительные значения и удовлетворяющие при любых положительных x и y равенству $f(x^y) = f(x)^{f(y)}$.

8. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве целых чисел, не превосходящих по модулю 1000. Обозначим через m число пар (x, y), для которых $f(x) = g(y)$, через n – число пар, для которых $f(x) = f(y)$, а через k – число пар, для которых $g(x) = g(y)$. Докажите, что $2m \leqslant n + k$.

9. Известно, что $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ – квадратные трехчлены. Может ли уравнение $f(g(h(x))) = 0$ иметь корни 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8?

Серия 7, с совсем глупыми функциями

1. (глупое упражнение) Докажите, что если $p = 4n - 1$ простое и $(2k-1, p) = 1$, то $(n + k(k-1))^{2n-1} \equiv 1 \pmod p$.

2. Докажите, что

а) если для натуральных чисел a и b число $(a^2 + b^2)/(ab - 1)$ натуральное, то оно равно 5.

б) уравнение $x^2 - 5xy + y^2 + 5 = 0$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

3. (Гаусс, Disquisitiones Arithmeticae, art.78, также известно под названием "обобщенной теоремы Вильсона") Докажите, что произведение всех элементов приведенной системы вычетов по модулю m сравнимо с ± 1 по модулю m, и установите, какой знак соответствует каждому m.

4. Найдите последовательность (a_n), определяемую условиями $a_1 = 1$, $1 + \sum\limits_{d|n} (-1)^{n/d} a_d = 0$.

5. Докажите, что если числа $m, n \in \mathbf{N}$ удовлетворяют неравенству $\sqrt{7} - m/n > 0$, то $\sqrt{7} - m/n > 1/mn$.

6. На плоскости лежит правильный восьмиугольник со стороной a. Его разрешается "перекатывать" по плоскости, переворачивая (симметрично отражая) относительно любой стороны. Докажите, что для любой точки плоскости и любого $\varepsilon > 0$ можно перекатить восьмиугольник в такое положение, что центр его будет находиться от точки M на расстоянии меньше ε.

7. Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ задана формулой $f(n) = \begin{cases} n + 10, n < 100 \\ f(f(n-11)), n \geqslant 100. \end{cases}$ Найдите $f(2011)$.

8. Найдите все такие функции а) $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$, б) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, что $f(x) + f(y) + f(xy) = f(x+y) + f(x)f(y)$ для любых положительных x и y.

9. Дана функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, не принимающая ни одно значение более 2003 раз. Докажите, что существуют натуральные m и n, для которых $f(m, n) > mn$.

Серия 8, с целыми частями и потенциальной бесконечностью

1. а) Докажите, что правильный треугольник нельзя нарисовать на клетчатой бумаге так, чтобы его вершины попали точно в узлы (вершины клеток).

б) Докажите, что на клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 1, можно при любом $\varepsilon > 0$ нарисовать правильный треугольник, вершины которого находились бы на расстояниях меньше ε от трех различных узлов.

2. Существует ли такое число h, что ни для какого натурального n число $[h \cdot 1969^n]$ не делится на $[h \cdot 1969^{n-1}]$?

3. Докажите, что в любом бесконечном подмножестве натурального ряда найдутся два элемента, сумма которых имеет простой делитель, больший миллиона.

4. Докажите, что не существует таких положительных чисел α, β и γ, что множества $A = \{[\alpha x]; x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{[\beta x]; x \in \mathbb{N}\}$ и $C = \{[\gamma x]; x \in \mathbb{N}\}$ не пересекаются, и $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$.

5. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots$ – бесконечная последовательность целых чисел. Докажите, что в ней существует либо бесконечная подпоследовательность, любые два члена которой не кратны друг другу, либо бесконечная подпоследовательность, каждый член которой кратен предыдущему.

6. Микрокалькулятор "ФН-89" выполняет только две операции: $X \mapsto 2X - 1$ и $X \mapsto 2X$. В микрокалькулятор введено некоторое натуральное число. Докажите, что, нажимая кнопки, из него можно получить число, являющееся точной пятой степенью.

7. Последовательность вещественных чисел a_1, a_2, a_3, …такова, что для любых m и n выполняется неравенство $|a_m + a_n - a_{m+n}| \leqslant \frac{1}{m+n}$. Докажите, что эта последовательность – арифметическая прогрессия.

8. Существует ли возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < \ldots$ такая, что каждое натуральное число единственным образом представляется в виде разности двух ее членов?

Серия 9, в которой нужна лемма Холла

1. Докажите, что чисто периодическая напрерывная дробь имеет значением приведенную квадратичную иррациональность.

2. Числа a и p – натуральные. Докажите, что если $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ и $a^{\frac{p-1}{q}} \not\equiv 1 \pmod p$ для каждого простого делителя q числа $p-1$, то p – простое.

3. В клетках таблицы $n \times n$ расставлены неотрицательные числа таким образом, что сумма чисел в любой строке и любом столбце равна 1. Докажите, что можно расставить n не бьющих друг друга ладей в клетках с положительными числами.

4. Пусть m – натуральное число. Докажите, что $\sum\limits_{\substack{x \bmod p \\ x \not\equiv 0 \bmod p}} x^m \equiv \begin{cases} 0 \pmod p, & \text{если } m \text{ не делится на } p-1, \\ -1 \pmod p, & \text{если } m \text{ делится на } p-1. \end{cases}$

5. Пусть A – конечное множество натуральных чисел. Докажите, что существует конечное множество натуральных чисел $B \subset A$ такое, что $\prod\limits_{x \in B} x = \sum\limits_{x \in B} x^2$.

6. Пусть X – конечное множество натуральных чисел и A – его подмножество. Докажите, что существует такое множество $B \subset X$, что A совпадает с множеством элементов X, которые делят нечетное количество элементов B.

7. Пусть A – бесконечное множество целых чисел такое, что каждое $a \in A$ является произведением не более чем 1987 простых чисел. Докажите, что существуют бесконечное множество $B \subset A$ и число p такое, что наибольший общий делитель любых двух чисел из B равен p.

8. (И.Шур). а) Докажите, что при любой раскраске натурального ряда в два цвета существуют три различных числа одного цвета, одно из которых равно сумме двух других.

б) Международное сообщество состоит из представителей шести различных стран. Список членов общества состоит из 1978 фамилий, занумерованных числами 1, 2, …, 1978.

Докажите, что существует хотя бы один член общества, номер которого равняется сумме номеров двух членов из его сттраны или удвоенному номеру некоторого члена из его страны.

9. Функция f определена на множестве всех неотрицательных целых чисел и принимает значения в этом множестве. Докажите, что равенство $f(f(n)) = n + 1987$ не может выполняться для всех $n \in \mathbb{N}_0$.

Математический бой старшей группы, 19 августа 2011 г.

1. Найдите все функции $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f(x + 2y) + f(y + 2x) = f(xy)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Двое играют в следующую игру. Первый записывает на доску отличную от нуля цифру. Второй пишет справа от нее еще одну цифру. Каждым следующим ходом игрок может либо дописывают справа еще одну цифру, либо переставить произвольный набор цифр так, чтобы после перестановки число увеличилось. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее
17761776 …1776 (сто раз по 1776). Кто выигрывает при правильной игре?

3. Куб с ребром 10 разбит на 1000 единичных кубиков. 500 из них – белые, а остальные черные. Докажите, что существует по крайней мере 100 единичных квадратов, каждый из которых является общей гранью белого кубика и черного кубика.

4. Пусть p и n – натуральные числа такие, что p – простое и $1 + np$ – точный квадрат. Докажите, что $n + 1$ – сумма p точных квадратов.

5. В футбольном турнире принимают участие n команд ($n \geqslant 5$). Каждая команда играет с каждой из остальных ровно один матч. Команда получает три очка за выигрыш, 1 очко за ничью и 0 за поражение. После турнира некоторые команды могут быть дисквалифицированы, а результаты всех их игр – отменены. После этого результаты оставшихся команд пересчитываются и определяется новый победитель – команда, набравшая больше очков, чем любая другая из оставшихся команд. (Если не дисквалифицирована ровно одна команда, то победителем становится она.)

Пусть $f_i(T)$ $(i = 1, \ldots, n)$ – наименьшее количество команд, которые нужно дисквалифицировать в турнире T для того, чтобы победителем оказалась i-я команда. Положим $f(T) = f_1(T) + \ldots + f_n(T)$.

Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения $f(T)$.

6. На отрезке $[1;\sqrt{2}]$ выбраны точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \geqslant 2)$. Докажите неравенство

$$\frac{\sqrt{x_1^2-1}}{x_2}+\frac{\sqrt{x_2^2-1}}{x_3}+\ldots+\frac{\sqrt{x_n^2-1}}{x_1} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}n.$$

7. Рассмотрим ортогональные проекции вершин A, B и C треугольника ABC на биссектрисы внешних углов при вершинах C, A и B соответственно. Докажите, что если d – диаметр описанной окружности треугольника, образованного основаниями этих проекций, а r и p – радиус вписанной окружности и полупериметр треугольника ABC соответственно, то $r^2+p^2=d^2$.

8. На плоскости даны пять точек такие, что каждый из 10 треугольников с вершинами в этих точках имеет площадь больше 2. Докажите, что среди них есть треугольник площади, большей 3.

9. Докажите, что для каждого натурального n существует многочлен P степени не выше n с целыми коэффициентами, такой, что $P(x)$ делится на 2^n для каждого целого четного x, и имеет остаток 1 при делении на 2^n для каждого целого нечетного x.

10. Для четырех точек A, B, C и D в пространстве выполняются равенства: $\angle ABC=\angle ADC$, $\angle BAD=\angle BCD$. Докажите, что $AB=CD$ и $BC=AD$.

Серия 10: немного производящих функций и прочее, по мелочи

Введем в рассмотрение следующие формальные степенные ряды (левые части равенств нужно понимать как формальные обозначения): $(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots$; $e^x = 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$; $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots$; $\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots$; $\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\ldots$.

1. Докажите следующие соотношения для формальных степенных рядов: а) $(1+x)^\alpha(1+x)^\beta=(1+x)^{\alpha+\beta}$; б) $e^xe^{-x}=1$; в) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$; г) $\exp(\ln(1+x))=1+x$.

2. Докажите, что

а) любой формальный степенной ряд вида $1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ обратим;

б) если его коэффициенты – целые, то обратный к нему также имеет целые коэффициенты.

3. (Эйлер) Рассмотрим разбиения натурального n на натуральные слагаемые (разбиения, отличающиеся порядком, мы будем считать одинаковыми; так, у числа 4 есть 5 разбиений: $4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$). Докажите, что число способов разбиения N на не более чем m слагаемых равно числу способов разбиения $N+\frac{m(m+1)}{2}$ на m неравных частей.

4. Пусть a и b – целые положительные числа такие, что a^2+b^2 делится на $ab+1$ без остатка. Докажите, что $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ – квадрат целого числа.

5. а) Плоский еж – это фигура, составленная из квадрата и шести приклеенных к нему (по сторонам) квадратов того же размера.

Разбейте плоскость на плоские ежи.

б) Пространственный еж – это фигура, составленная из куба и шести приклеенных к нему (в точности по граням) кубов того же размера. Разбейте пространство на пространственные ежи.

6. (Лебег) Докажите, что уравнение $x^2-y^3=7$ не имеет решений в натуральных числах x и y.

7. На однокруговой шахматный турнир приехало n шахматистов из страны A и n шахматистов из страны B. Оказалось, что как бы ни разбить шахматистов на пары (чтобы друг с другом играли шахматисты разных стран), найдется хотя бы одна пара шахматистов, которые уже встречались ранее друг с другом. Докажите, что можно выбрать a шахматистов из страны A и b шахматистов из страны B так, что каждый из выбранных a шахматистов встречался с каждым из выбранных b шахматистов, а $a+b>n$.

8. (Теорема Д.Кенига) Докажите, что если прямоугольная матрица составлена из нулей и единиц, то минимальное число линий (строк и столбцов), которые содержат все единицы, равно максимальному числу единиц, которые могут быть выбраны так, чтобы никакие две из них не лежали на одной и той же линии.

9. Найдите все функции f такие, что для любых чисел x, y выполнено равенство $f(x+y)=f(x)\cos y+f(y)\cos x$.

Серия 11. Алгоритм Форда-Фалкерсона и всё такое прочее.

Определение. *Сеть* – ориентированный граф с двумя отмеченными вершинами: *входом* (в который не ведет ни одно ребро) и *выходом* (из которого ни одно ребро не выходит).

Поток на сети – это функция на ребрах графа, принимающая (в простейшем случае) значения 0 и 1 и удовлетворяющая следующему условию: для каждой промежуточной (т.е. отличной от входа и выхода) вершины сумма значений потока по всем ребрам, входящим в эту вершину, равна сумме значений по всем выходящим из нее ребрам.

Поток со значениями 0 и 1 можно представлять себе просто как множество ребер, отмеченных единицей (их мы будем называть *насыщенными дугами*, а остальные ребра – *свободными*).

Величина потока – это сумма значений потока по всем ребрам, выходящим из входа.

1. а) Докажите, что величина потока равна сумме значений потока по всем ребрам, входящим в выход.

Пусть теперь через сеть пропущен некоторый поток. Применим к нему следующий *алгоритм Форда-Фалкерсона*:

Пометим плюсом все вершины, в которые можно попасть из входа по свободным ребрам. Затем от каждой уже помеченной (плюсом или минусом) вершины будем помечать плюсом те вершины, в которые из нее можно попасть по свободным ребрам, и минусом – все те вершины, куда из нее можно вернуться (в направлении, противоположном стрелке) по насыщенным дугам. При этом, возможно, некоторые вершины будут помечены и плюсом, и минусом. Пометим этим способом все возможные вершины.

б) Докажите, что если выход оказался помеченным, то поток можно увеличить (т.е. пропустить через сеть поток большей величины).

в) Докажите, что если выход оказался непомеченным, то поток максимален.

2. Квадрат двумя способами разбит на 100 равновеликих прямоугольников. Докажите, что в нем можно отметить 100 точек так, что в каждом из прямоугольников обоих разбиений будет лежать ровно одна точка.

3. Разбиение $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_s$, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_s$, назовем симметричным, если для любого $k \leqslant s$ число входящих в него слагаемых, не меньших k, равно a_k. Докажите, что число симметричных разбиений числа n равно числу его разбиений на различные нечетные слагаемые.

4. а) Последовательность целых чисел (a_n) удовлетворяет условию $a_{n+2} = ka_{n+1} + la_n$, $n \geqslant 0$, где k, l – целые числа. Известно, что в этой последовательности бесконечное количество чисел, делящихся на d. Докажите, что, начиная с некоторого n, эти числа встречаются в последовательности через равные промежутки.

б) Даны многочлены с действительными коэффициентами $R(x)$, $S(x)$, $T(x)$. Последовательность многочленов с действительными коэффициентами $P_i(x)$, $i \in \mathbb{N}$, удовлетворяет соотношениям $P_{i+2}(x) = R(x)P_{i+1}(x) + S(x)P_i(x)$ при $i \geqslant 1$. Известно, что в этой последовательности бесконечное количество многочленов, делящихся на $T(x)$. Докажите, что, начиная с некоторого n, эти многочлены встречаются в последовательности через равные промежутки.

5. Для натуральных n и k, $n \geqslant k$, обозначим $P_n^{(k)}$ количество разбиений числа n на k натуральных слагаемых. Разбиения, которые отличаются только порядком слагаемых, считаем одинаковыми. Например, $P_4^{(2)} = 2$, поскольку $4 = 1 + 3$ и $4 = 2 + 2$. Докажите, что для $n \geqslant 2k$ $P_n^{(k)} = P_{n-1}^{(k-1)} + P_{n-k}^{(k)}$.

6. Под разбиением π целого $n \geqslant 1$ мы понимаем представление n как суммы одного или нескольких натуральных чисел, в которой слагаемые идут в неубывающем порядке. (Например, если $n = 4$, то разбиения суть $1 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 2$, $1 + 3$, $2 + 2$ и 4.) Для каждого разбиения π определим $A(\pi)$ как количество единиц, присутствующих в π, и $B(\pi)$ как количество различных чисел, присутствующих в π. (Например, если $n = 13$ и π – разбиение $1+1+2+2+2+5$, то $A(\pi) = 2$ и $B(\pi) = 3$). Докажите, что для любого данного n сумма $A(\pi)$ по всем разбиениям π числа n равна сумме $B(\pi)$ по всем разбиениям π числа n.

7. Докажите, что при натуральном n и простом p $C_n^p \equiv \left[\frac{n}{p}\right] \pmod p$. Докажите также, что если $[n/p]$ имеет делитель p^s, то C_n^p делится на p^s.

8. Несколько точек на плоскости расположены так, что расстояние между любыми двумя из них больше 2. Доказать, что любое множество площади меньше π можно параллельно перенести на вектор длины меньше 1 так, чтобы оно не содержало ни одной из точек.

9. Последовательность целых чисел $\{a_n\}$, $n \geqslant 1$, определена условием $\sum\limits_{d|n} a_d = 2^n$. Докажите, что для любого натурального n число a_n делится на n.

Серия 12: всего понемножку

1. Каких чисел больше среди натуральных чисел от 1 до 1000000: представимых в виде $2x^2 - 3y^2$ или представимых в виде $10xy - x^2 - y^2$ с целыми x и y?

2. Пусть дана транспортная сеть. Рассмотрим произвольное множество промежуточных вершин A (т.е. не содержащие ни входа, ни выхода).

Пропускная способность $c(A)$ множества A – число ребер, входящих в A (т.е. с концом в A и началом вне A).

Полная потребность $d(A)$ множества A – число ребер, ведущих из A прямо в выход.

Докажите следующую *теорему Гэйла о насыщении:*

Для того чтобы существовал поток, насыщающий все выходные дуги (т.е. такой, значения которого на всех ребрах, ведущих в выход, равны 1), необходимо и достаточно, чтобы для любого множества промежуточных вершин A его полная потребность не превосходила пропускной способности: $d(A) \leqslant c(A)$.

3. *Разрез* сети – это любое множество ее вершин, содержащее выход, но не содержащее вход. *Пропускная способность* разреза B – число $c(B)$ дуг, входящих в B.

а) Докажите, что величина любого потока φ не превосходит пропускной способности любого разреза B: $|\varphi| \leqslant c(B)$.

Минимальный разрез – это разрез с наименьшей пропускной способностью среди всех разрезов.

Максимальный поток – это поток максимальной величины.

б) (Теорема Форда-Фалкерсона) Докажите, что пропускная способность минимального разреза равна величине максимального потока.

4. а) Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Докажите, что для любой точки (x, y) найдутся такие целые числа (m, n), что $f(x - m, y - n) = (x - m)^2 + (x - m)(y - n) + (y - n)^2 \leqslant 1/2$.

б) Обозначим через $\overline{f}(x, y)$ наименьшее из чисел $f(x - m, y - n)$ при всех целых m и n. Утверждение задачи а) состояло в том, что для всех целых x и y выполнено неравенство $\overline{f}(x, y) \leqslant 1/2$.

Докажите, что на самом деле верно более сильное неравенство $\overline{f}(x, y) \leqslant 1/3$. Найдите все точки, для которых достигается неравенство $\overline{f}(x, y) = 1/3$.

5. Докажите, что каждое целое положительное число можно представить в виде суммы различных целых положительных слагаемых столькими же способами, сколькими его можно представить в виде суммы нечетных (быть может, и совпадающих) слагаемых.

6. Докажите, что

а) Докажите, что если C_{2n}^n делится на p^k ($n > 2$ – натуральное число, p – простое), то $p^k \leqslant 2n$;

б) $n^{\pi(2n)-\pi(n)} \leqslant C_{2n}^n < (2n)^{\pi(2n)}$;

в) $\frac{4^n}{2\sqrt{n}} < C_{2n}^n < 4^n$ при любом натуральном $n > 2$;

г) (П.Л.Чебышев, 1850) $\pi(x) > a\frac{x}{\ln x}$ при всех натуральных x для некоторого положительного a, например, $a = \frac{1}{5}$;

7. Докажите, что на клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 1, можно при любом $\varepsilon > 0$ нарисовать правильный 17-угольник, вершины которого находились бы на расстояниях меньше ε от трех различных узлов.

8. Докажите, что целые неотрицательные числа x, y удовлетворяют уравнению $x^2 - mxy + y^2 = 1$ (где m – данное целое число, большее единицы) тогда и только тогда, когда x и y – соседние члены последовательности $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 1, \varphi_2 = m, \varphi_3 = m^2 - 1, \varphi_4 = m^3 - 2m, \varphi_5 = m^4 - 3m^2 + 1, \ldots$, в которой $\varphi_{k+1} = m\varphi_k - \varphi_{k-1}$ для всех $k \geqslant 1$.

Заключительная олимпиада, 25 августа 2011 г.

1. В клетках таблицы 11×11 расставлены все натуральные числа от 1 до 121. Дима посчитал произведение чисел в каждой строке, а Саша – произведение чисел в каждом столбце. Могли ли они получить одинаковые наборы из 11 чисел?

2. Найдите все функции $f(x)$, заданные и непрерывные на всей вещественной прямой, для которых при любом x выполняются неравенства $f(3x-2) \leqslant f(x) \leqslant f(2x-1)$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны, $\angle A = 150°$, $\angle B = 44°$, $\angle C = 72°$. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает сторону BC в точке P. Найдите $\angle APD$.

4. На плоскости провели 100 прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке, и отметили все точки их пересечения. После этого все прямые и k отмеченных точек стерли. При каком наибольшем k по оставшимся точкам пересечения заведомо можно восстановить исходные прямые?

5. Существуют ли такие квадратные трехчлены P, Q, R, что для любых целых x и y найдется целое z, удовлетворяющее равенству $P(x) + Q(y) = R(z)$?

6. В клетках доски $n \times n$ расставлены нули и единицы. Во всех клетках левого столбца стоят единицы, и в каждой фигурке вида  (состоящей из клетки и ее соседей слева и снизу) сумма чисел четна. Докажите, что в таблице нет двух одинаковых строк.

7. Произведение положительных чисел a, b, c и d равно 1. Докажите, что $\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+cd}{1+c} + \frac{1+da}{1+d} \geqslant 4$.

8. В городе N. существует множество оппозиционных обществ, каждое из которых состоит из 10 членов. Известно, что для любых 2004 обществ найдется человек, состоящий хотя бы в 11 из них. Докажите, что правительство может арестовать 2003 человека так, чтобы в каждом обществе хотя бы один член был арестован.