Серия 1(а): что мы знаем?

1. (Гаусс, Disquisitiones Arithmeticae, art.78, также известно под названием "обобщенной теоремы Вильсона").

а) Докажите, что произведение всех элементов приведенной системы вычетов по модулю m сравнимо с ± 1 по модулю m;

б) Установите, какой знак соответствует каждому m.

2. а) Пусть a, m, n – натуральные числа, $a > 1$. Докажите, что если $a^m + 1$ делится на $a^n + 1$, то m делится на n.

б) Пусть a, b, m, n – натуральные числа, причем a взаимно просто с b и $a > 1$. Докажите, что если $a^m + b^m$ делится на $a^n + b^n$, то m делится на n.

3. Найдите остаток, который даёт многочлен x^{2020} при делении на многочлен а) x^2+1, б) x^2+x+1, в) x^2-5x+6.

4. Последовательность (x_n) задана своими первыми двумя членами $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ и условием $x_{n+1} = kx_n - x_{n-1}$. Имеет ли период эта последовательность, если: а) $k = \sqrt{2}$; б) $k = \sqrt{3}$; в) $k = (\sqrt{5}+1)/2$; г) $k = \frac{3}{2}$?

5. Произведение положительных вещественных чисел α, β, γ равно натуральному числу m. Докажите, что сравнение $ax + by + cz \equiv 0 \pmod m$ с произвольными целыми коэффициентами a, b, c имеет решение в целых числах x, y, z, отличных от 0 и таких, что $|x| \leqslant \alpha$, $|y| \leqslant \beta$, $|z| \leqslant \gamma$.

6. а) Докажите, что если $(a, b) = 1$ и $a + b = n + 1$, то число $\frac{n!}{a!b!}$ натуральное.

б) Докажите, что если $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$ и $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n + 1$, то число $\frac{n!}{a_1!a_2!\ldots a_k!}$ натуральное.

7. Для каждого натурального n положим $\nu(n) = (-1)^k$, где k – количество простых сомножителей в разложении n. Например, $\nu(16) = (-1)^4 = 1$, $\nu(72) = (-1)^5 = -1$, $\nu(1) = (-1)^0 = 1$. Докажите, что $\sum\limits_{n|d} \nu(d)$ равно 1, если n – точный квадрат, и 0 в противном случае.