Серия 1(b): несколько арифметических сюжетов

1. а) Пусть a, m, n – натуральные числа, $a > 1$. Докажите, что если $a^m - 1$ делится на $a^n - 1$, то m делится на n.

б) Пусть a, m, n – натуральные числа, $a > 1$. Докажите, что если $a^m + 1$ делится на $a^n + 1$, то m делится на n.

в) Пусть a, b, m, n – натуральные числа, причем a взаимно просто с b и $a > 1$. Докажите, что если $a^m + b^m$ делится на $a^n + b^n$, то m делится на n.

2. Найдите остаток, который даёт многочлен x^{2020} при делении на многочлен а) x^2+1, б) x^2+x+1, в) x^2-5x+6.

3. Натуральные числа S, p и q таковы, что $S \equiv 0 \pmod q$, $S \equiv 1 \pmod p$, $q > p$ и $S \leqslant pq$. Докажите, что $S \leqslant pq - \frac{q(p-1)}{q-p}$.

4. Дано натуральное число $n > 2$. Докажите, что существует такое натуральное число $m > n^n$, что число $\frac{n^m-m^n}{m+n}$ – натуральное.

5. Про многочлены $R(x)$ и $S(x)$ с целыми коэффициентами известно, что при любом целом x число $R(S(x)) - x$ делится на данное целое k. Докажите, что число $S(R(x)) - x$ тоже делится на k при любом целом x.

6. Какое наибольшее значение может иметь разность арифметической прогрессии, среди членов которой есть числа $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{17}$?

7. Для каждого натурального n положим $\nu(n) = (-1)^k$, где k – количество простых сомножителей в разложении n. Например, $\nu(16) = (-1)^4 = 1$, $\nu(72) = (-1)^5 = -1$, $\nu(1) = (-1)^0 = 1$. Докажите, что $\sum\limits_{d|n} \nu(d)$ равно 1, если n – точный квадрат, и 0 в противном случае.