Вступительные задачи, 9–11 класс

1. Для непостоянной арифметической прогрессии (a_n) существует такое натуральное $n > 1$, что $a_n + a_{n+1} = a_1 + \ldots + a_{3n-1}$. Докажите, что в этой прогрессии нет нулевых членов.

2. Каждые два из n городов Руритании соединены прямым авиарейсом одной из двух авиакомпаний – Альфа или Бета. Промонопольный комитет хочет, чтобы не менее k рейсов выполнялись компанией Альфа. Для этого он может хоть каждый день выбирать любые три города и изменять принадлежность трех рейсов, связывающих эти города друг с другом (т.е. отбирать каждый из этих рейсов у компании, которая его выполняет, и передавать другой). При каком наибольшем k комитет заведомо сможет за какое-то время достичь своей цели, как бы ни распределялись рейсы сейчас?

3. Докажите, что для каждого натурального числа N найдется такое целое $k \geqslant 0$, что N удастся записать в виде суммы чисел 2^0, 2^1, 2^2, $\ldots$, 2^k, каждое из которых участвует в этой сумме 1 или 2 раза. (Например, $12 = 2^0 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^2$.)

4. Дано нечётное натуральное число $n > 1$. На доске записаны числа n, $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $2n-1$. Докажите, что можно стереть одно из них так, чтобы сумма оставшихся чисел не делилась ни на одно из оставшихся чисел.

5. Прямая ℓ на координатной плоскости не параллельна осям координат. При каком наименьшем d можно утверждать, что расстояние от некоторой точки с целыми координатами до прямой ℓ не превосходит d?

6. У Васи есть 100 карточек трех цветов, карточек каждого цвета не больше 50. Докажите, что он может выложить из них квадрат 10×10 так, чтобы любые две соседние (по стороне) карточки оказались разного цвета.

7. Каждое натуральное число покрашено в один из ста цветов. Докажите, что можно найти несколько (не менее двух) одноцветных чисел, произведение которых будет иметь ровно 1000 натуральных делителей.

8. Докажите неравенство $(ab+c)^n - c \leqslant a^n(b+c)^n - a^n c$ для всех натуральных n и вещественных $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$ и $c > 0$.

9. Найдите все вещественные k, обладающие следующим свойством: если α – корень многочлена $x^3 - 12x + 8$, то $2 - \frac{k}{\alpha}$ – тоже корень этого многочлена.

10. Для каждой точки P отрезка AB рассмотрим точку P' отрезка $A'B'$, делящую $A'B'$ в том же отношении. Докажите, что точки, лежащие на отрезках PP' и делящие их в заданном отношении, либо различны и коллинеарны, либо совпадают.