Вступительные задачи, 7–8 класс

1. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна диагонали BD. Точка M – середина диагонали AC. Прямая BM пересекает отрезок CD в точке E. Докажите, что $BE = CE$.

2. У Оли есть прямоугольная шоколадка с целыми сторонами, разбитая на единичные квадратики. Площадь шоколадки делится на 1000. Докажите, что Оля может съесть несколько квадратиков так, чтобы оставшаяся часть шоколадки оказалась прямоугольником, а площадь съеденной части составляла бы ровно 73% от исходной.

3. Курс криптовалюты Чухойн 1 марта составлял один доллар, а далее каждый день повышался на доллар. Курс криптовалюты Антониум 1 марта составлял также один доллар, а далее каждый день оказывался равным сумме вчерашних курсов Чухойна и Антониума, деленной на их произведение. Сколько стоил Антониум 31 мая (т.е. на 92-й день)?

4. Хулиган Вася недоволен своим средним баллом по математике, который опустился ниже 3. В качестве меры по резкому поднятию отметки он добрался до школьного журнала и исправил там все свои колы на тройки. Докажите, что после этого его средний балл все же не превысит 4.

5. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B + \angle B_1 = 180°$. Докажите, что если $A_1B_1 = AC + BC$, то $AB = A_1C_1 - B_1C_1$.

6. Клетки доски 2021×100 (2021 горизонталь, 100 вертикалей) покрашены в шахматном порядке. Стоящая на доске фигура *кузнечик* держит под боем все клетки своей горизонтали, имеющие тот же цвет, что и клетка, на которой она стоит, а также все клетки своей вертикали, имеющие противоположный цвет. (Чтобы побить какую-то клетку, кузнечик может перепрыгивать через другие фигуры.) Какое наибольшее число не бьющих друг друга кузнечиков можно расставить на этой доске?

7. На доске написано натуральное число. Каждую минуту к числу на доске прибавляется сумма его первых 100 цифр. Докажите, что через некоторое время три раза подряд получится число, не делящееся на 3.

8. В государстве некоторые города соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из каждого города выходит не более 10 авиалиний. Докажите, что если в государстве более 200 авиалиний, то найдутся 11 авиалиний, никакие две из которых не имеют общего города.

9. Найдите все целые числа x, y, для которых $x + y$, $2x + 3y$ и $3x + y$ – точные квадраты.

10. a и b – натуральные числа, $a > b \geqslant 2$. Докажите, что если при каждом $k = 1, 2, \ldots, a - b$ числа $a + k$ и $b + k$ взаимно просты, то a и b – последовательные числа.