Серия 1(а), с повышенным содержанием арифметики

1. Найдите остаток, который даёт многочлен x^{2020} при делении на многочлен а) x^2+1, б) x^2+x+1, в) x^2-5x+6.

2. a, b, c – различные числа, причем $c \neq 0$. Длказать, что если уравнения $x^2+ax+bc=0$ и $x^2+bx+ca=0$ имеют ровно один общий корень, то другие корни этих уравнений удовлетворяют уравнению $x^2+cx+ab=0$.

3. Найти целое число a, при котором $(x-a)(x-10)+1$ разлагается в произведение $(x+b)(x+c)$ с целыми b и c.

4. a и b – различные натуральные числа, большие 1, такие, что a^2+b делится на b^2+a. Докажите, что число b^2+a – составное число.

5. На доске записаны дроби $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}$.

а) Можно ли перед каждой из этих дробей поставить знак "+" или "-" так, чтобы их сумма равнялась нулю?

б) Если нет, то какое наименьшее количество этих дробей надо стереть, чтобы, поставив перед оставшимися дробями знаки "+" или "-", можно было получить в сумме нуль?

6. Даны простые числа p и q и натуральные числа x и y, причем $x<p$ и $y<q$. Докажите, что если число $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}$ целое, то $x=y$.

7. a, b, c, d — натуральные числа, $ab=cd$.

а) Докажите, что существуют натуральные числа u_1, v_1, u_2, v_2, для которых $a=u_1v_1$, $b=u_2v_2$, $c=u_1u_2$, $d=v_1v_2$.

б) Докажите, что число $a+b+c+d$ — составное.

8. Даны натуральные числа m и n. Докажите, что если при бесконечно многих натуральных k число $k^2+2kn+m^2$ является точным квадратом, то $m=n$.