

Серия 1(b), большей частью про индукцию

1. Город окружен круговым кольцом с односторонним движением. Его пересекают несколько прямых улиц, на каждой из которых тоже введено одностороннее движение. Докажите, что в городе найдется микрорайон, который можно объехать по периметру, не нарушая правил движения.

2. В прямоугольнике $3 \times n$ (3 строки, n столбцов) расставлены фишки трех цветов по n штук каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трех цветов.

3. Пусть p_n – n -е простое число ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$). Докажите, что $p_n > 3n$ при всех $n > 12$.

4. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1 = 1, x_{n+1} = 2x_n + 3$. Найдите явное выражение для x_n .

5. Выбежав после уроков на двор, каждый школьник кинул снежком ровно в одного другого школьника. Докажите, что всех учащихся можно разбить на три команды так, что члены одной команды друг в друга снежками не кидали.

6. В кинотеатре 7 рядов по 10 мест каждый. Группа из 50 детей сходила на утренний сеанс, а потом на вечерний. Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем тоже сидели в одном ряду.

7. В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города A в самый удаленный от него город B , оттуда – в самый удаленный от него город C и т.д. Докажите, что если C не совпадает с A , то путешественник никогда не вернется в A .

8. В таблицу $n \times n$ записаны n^2 чисел, сумма которых неотрицательна. Докажите, что можно переставить столбцы так, что сумма чисел по диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, будет неотрицательна.