

Серия 2(b): графство и пр.

1. Докажите, что
 - а) каждое натуральное число можно представить в виде суммы степеней двойки с различными целыми неотрицательными показателями,
 - б) и притом единственным образом.
2. В маленьком приходе графства Липшир живут только 15 джентльменов. Можно ли соединить их усадьбы дорогами так, чтобы из четырех усадеб выходило по 3 дороги, из восьми – по 6 и из остальных трех – по пять?
3. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
4. Может ли 25-звенная ломаная пересекать каждое свое звено ровно 3 раза?
5. Жрецы бога Инварианта изъясняются на особом языке, алфавит которого состоит из двух букв – М и А. От следующих восьми замен буквосочетаний смысл любого слова не меняется: МАМ \Leftrightarrow АА, МАА \Leftrightarrow АМ, ААМ \Leftrightarrow МА, ААА \Leftrightarrow ММ. Являются ли в этом языке синонимами слова МАА и АММ?
6. Сеть дорог в графстве Липшир устроена так, что из любого города можно добраться до любого другого ровно одним способом. Докажите, что есть город, соединенный с внешним миром ровно одной дорогой.
7. Рассмотрим последовательность 2, 6, 12, ... (эта последовательность составлена из чисел вида $n(n+1)$). Докажите, что к любому натуральному числу, большему единицы, можно прибавить подходящий член этой последовательности так, что их сумма окажется точным квадратом.
8. Квадраты двух последовательных чисел отличаются лишь перестановкой двух последних цифр. Найдите эти числа.