Серия 3(а): арифметика и алгебра.

1. $z+\frac{1}{z}=1$. Найдите $z^n+\frac{1}{z^n}$ при всех натуральных n.

2. Докажите, что $\sum\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant m\\ x^2-x+1\ \vdots\ m}} x$ делится на $m+1$ при натуральном $m>3$.

3. Докажите, что ни при каком натуральном $n>1$ число $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ не является целым.

4. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\frac{ab}{a-b}=c$. Известно также, что числа a, b и c не имеют общего для них всех натурального делителя, большего 1. Докажите, что $a-b$ есть точный квадрат.

5. Для некоторых натуральных a и b число $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ – целое. Докажите, что $(a,b)\leqslant\sqrt{a+b}$.

6. Решите в натуральных числах уравнение $4x^3-x=y^2$.

7. Даны 1985 натуральных чисел, все простые делители которых не превосходят 26. Докажите, что

а) произведение каких-нибудь двух из них является точным квадратом,

б) произведение каких-нибудь четырёх из них является точной четвёртой степенью.

8. Даны положительные числа a, b, c и d. Докажите, что если $cd=1$, то на отрезке с концами ab и $(a+c)(b+d)$ найдется по крайней мере один квадрат целого числа.