Серия 3(b), в основном арифметическая

1. На круглом барабане 1024 сектора. Докажите, что в каждый сектор можно записать десятизначное число из цифр 1 и 2 так, чтобы все числа были различными и любые два соседних различались ровно в одном разряде.

2. Докажите, что $2^n > n^2$ при натуральном $n > 5$.

3. Множество натуральных чисел разбито на непересекающиеся множества N_1 и N_2 такие, что разность чисел, лежащих в одном множестве, не является простым числом, большим 100. Найдите все такие разбиения.

4. Докажите, что ни одно из чисел $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ и $p_1 p_2 \ldots p_n - 1$, где p_1, p_2, …, p_n – первых n простых чисел, не является полным квадратом ни при каком натуральном $n > 1$.

5. Докажите, что при любом натуральном n число $\frac{10^n - 1}{81} - \frac{n}{9}$ целое.

6. На доске написано целое положительное число. Число разрешено увеличивать на треть или на одну пятую его значения. Докажите, что, в каком бы порядке ни проделывались эти операции, число на доске рано или поздно перестанет быть целым.

7. На конгресс приехало 100 учёных, каждый знает пять языков. Оказалось, что любые шестеро из них могут общаться на одном языке. Докажите, что все приехавшие учёные могут общаться на одном языке.

8. В графстве Липшир из усадьбы каждого джентльмена выходит ровно 10 дорог к другим усадьбам. При этом каждый джентльмен может доехать по дорогам до любого другого. Однажды одну из дорог перекопали, и по ней стало невозможно проехать. Докажите, что любой джентльмен по-прежнему может нанести визит вежливости любому другому.