**Серия 4(а): что мы узнали.**

1. Докажите, что сумма векторов, идущих из центра правильного $n$-угольника в его вершины, равна $\vec{0}$.

2. Даны 8 действительных чисел: $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $h$. Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac+bd$, $ae+bf$, $ag+bh$, $ce+df$, $cg+dh$, $eg+fh$ неотрицательно.

3. а) $2^n-2$ делится на $n$. Докажите, что $2^{2^n-1}-2$ делится на $2^n-1$.

б) последовательность натуральных чисел $\{a_k\}$ определена рекуррентно: $a_1$ – простое, $a_k=2^{a_{k-1}}-1$. Докажите, что $2^{a_k}-2$ делится на $a_k$ при всех натуральных $k$.

4. На плоскости дано 1980 векторов, причем среди них есть не коллинеарные. Известно, что сумма любых 1979 векторов коллинеарна с вектором, не включенным в сумму. Докажите, что сумма всех 1980 векторов равна нулевому вектору.

5. Докажите, что а) вещественные, б) комплексные корни многочлена $nx^n-x^{n-1}-\ldots-x-1$ по модулю не превосходят 1.

6. Докажите, что $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=-1$.

7. Пять комплексных чисел $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$ и $c_5$ связаны соотношением $\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}+\frac{1}{c_4}+\frac{1}{c_5}=0$. Докажите, что если точки плоскости, изображающие комплексные числа $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$ и $c_5$, лежат в вершинах выпуклого пятиугольника, то точка 0 находится внутри этого пятиугольника.

8. Дано простое число $p$ и целое $a$, не кратное $p$. Назовём два ненулевых вычета $x$ и $y$ $\mathrm{mod}\,p$ *эквивалентными*, если $x\equiv a^ky \pmod p$ для некоторого натурального $k$.

а) Докажите, что все ненулевые вычеты $\mathrm{mod}\,p$ разбиваются на классы так, что все вычеты в одном классе эквивалентны друг другу, а вычеты из разных классов – нет.

б) Докажите, что во всех классах поровну элементов.

в) Выведите из последнего утверждения малую теорему Ферма.