

Серия 4(b), формалистическая.

1. Какое наибольшее количество подмножеств множества $\{1, 2, \dots, 2024\}$ можно выбрать так, чтобы любые два различных выбранных подмножества имели ровно 2022 общих элементов?

2. Сеть дорог в графстве Липшир устроена так, что из любого города можно добраться до любого другого. Докажите, что можно закрыть некоторые дороги так, чтобы из любого города стало можно добраться до любого другого ровно одним способом.

3. В графстве имеется 1000 коттеджей, в каждом из которых живет по одному джентльмену. В один прекрасный день каждый джентльмен переезжает из своего дома в какой-либо другой (переезд осуществляется так, что после него в каждом доме живет один джентльмен). Доказать, что после переезда можно так покрасить все 1000 коттеджей синей, зеленой и красной красками, чтобы у каждого хозяина цвет его нового дома отличался от цвета старого дома.

4. Эксцентричный джентльмен мистер Доджсон построил в саду модель графства Липшир под названием "Зазеркалье". Если две усадьбы в графстве соединены дорогой, то в Зазеркалье — нет, и наоборот. Из усадьбы A нельзя проехать в усадьбу B , заехав по дороге менее, чем к двум джентльменам. Докажите, что в Зазеркалье можно проехать из любой усадьбы в любую, заехав по дороге не более, чем в две чужих усадьбы.

5. 11 мальчиков выбрали по 17 подряд идущих чисел от 1 до 100. Докажите, что есть число, которое встретилось хотя бы у троих из них.

6. Среди чисел от 1 до 1000 выбрали 29 чисел. Докажите, что среди них найдутся такие два, что разность большего из них и меньшего а) не более 35; б) не менее 28.

7. В начале времен в Ачухонии жили 100 рыцарей, 99 принцесс и 101 дракон. Рыцари убивают драконов, драконы едят принцесс, а принцессы изводят до смерти рыцарей. Древнее заклятие запрещает убивать того, кто сам погубил нечетное число других жителей. Сейчас в Ачухонии остался всего один житель. Кто это?

8. На доске написаны целые числа от 1 до 2022. Разрешено взять любые три числа a , b , c и вместо них написать $\frac{ab}{c}$, $\frac{ac}{b}$, $\frac{bc}{a}$. Можно ли в результате получить целые числа от 2 до 2023?