Серия 5(а), техническая.

1. Докажите, что если $\frac{p}{q}$ – несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем полинома $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ с целыми коэффициентами, то а) p – делитель a_n; б) q – делитель a_0; в) $p - kq$ – делитель $f(k)$ при любом целом k.

2. Многочлен p обладает таким свойством: для некоторого числа a $p(x) = p(a - x)$. Докажите, что $p(x)$ можно представить в виде многочлена от $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$.

3. Существует ли многочлен $P(x)$ такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ и $P(n)$ иррационально для любого целого n, отличного от 1 и 2?

4. На координатной плоскости нарисована кривая $y^3 = x^2$. Прямая пересекает эту кривую в трёх точках $A_i(x_i, y_i)$. Докажите, что $\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} + \frac{y_3}{x_3} = 0$.

5. Последовательность натуральных чисел $\{a_i\}$ такова, что $(a_i, a_j) = (i, j)$ для всех $i \neq j$. Докажите, что $a_i = i$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

6. Пусть $n > 2$ – целое число. Какая цифра стоит после запятой в десятичной записи числа $\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + n}$?

7. Даны три квадратных трехчлена с попарно различными старшими коэффициентами. Графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все три графика имеют ровно одну общую точку.

8. Известно, что уравнение $x^{12} - abx + a^2 = 0$ имеет корень $x_0 > 2$. Докажите, что $|b| > 64$.