Серия 1: вперёд по нескольким направлениям.

1. (Гаусс, Disquisitiones Arithmeticae, art.78, также известно под названием "обобщенной теоремы Вильсона") Докажите, что произведение всех элементов приведенной системы вычетов по модулю m сравнимо с ± 1 по модулю m, и установите, какой знак соответствует каждому m.

2. а) Докажите, что $2^{3^{100}} + 1$ делится на 3^{101}, и б) не делится на 3^{102}.

в) Найдите наименьшее n, для которого $5^n - 1$ делится на 2^k.

3. Число 76 обладает следующим свойством: последние две цифры числа $76^2 = 5776$ дают снова 76.

а) Какие двузначные числа обладают этим свойством?

б) Найдите все трехзначные числа A такие, у которых последние три цифры числа A^2 составляют число A.

в) Существует ли бесконечная последовательность цифр a_0, a_1, a_2, ...такая, что для любого n квадрат записываемого ими числа $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ оканчивается цифрами $\overline{\dots a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$? (Очевидные ответы $a_0 = 0$ или 1, $a_i = 0$ при $i > 1$ исключаем). Проведите полное исследование.

4. N ребят перекидываются N мячами. В начале игры каждый из них бросает свой мяч кому-нибудь из своих товарищей и сам ловит брошенный кем-нибудь мяч (он может подбросить и поймать свой собственный мяч) так, что снова у всех оказывается по мячу. Затем ребята опять бросают мячи тем же, кому они бросали их в первый раз, и так далее. Игра останавливается когда все мячи вернулись к своим владельцам (чтобы мячи не перепутались, будем считать их разноцветными).

Докажите, что

а) к каждому из участников мяч вернется не более, чем через N бросаний;

б) игра обязательно закончится;

в) для 5 и 10 участников она может закончиться самое большее через соответственно 6 и 30 бросаний;

г) длительность игры всегда является делителем $N!$;

д) длительность игры не может превышать $3^{N/3}$.

5. На полке стоят в беспорядке 100 томов энциклопедии.

а) Каждую минуту библиотекарь меняет местами два (случайно выбранных) рядом стоящих тома, среди которых том с бо́льшим номером стоит левее. Докажите, что рано или поздно тома будут расставлены по порядку.

б) Какое неибольшее время может для этого потребоваться?

в) Пусть Каждую минуту библиотекарь меняет местами два любых (не обязательно соседних) тома, среди которых том с бо́льшим номером стоит левее. Докажите, что рано или поздно тома будут расставлены по порядку.

г) Какое неибольшее время может для этого потребоваться?

6. а) Докажите, что многочлен $P_n(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$ принимает целые значения при всех целых x.

б) Докажите, что многочлен $P(x) = c_n P_n(x) + c_{n-1} P_{n-1}(x) + \dots + c_0 P_0(x)$, где $c_0, c_1, \dots, c_n$ – целые числа, принимает целые значения при всех целых x.

в) Докажите, что всякий многочлен $P(x)$ степени n, принимающий целые значения при всех целых x, можно представить в виде $P(x) = c_n P_n(x) + c_{n-1} P_{n-1}(x) + \dots + c_0 P_0(x)$, где $c_0, c_1, \dots, c_n$ – целые числа.

г) Докажите, что многочлен $P(x)$ степени n, принимающий целые значения при $x = 0, 1, \dots, n$, принимает целые значения при всех целых x.

д) Докажите, что многочлен $P(x)$ степени n, принимающий целые значения в $n+1$ последовательных целых точках, принимает целые значения при всех целых x.

7. Докажите, что

а) любой многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ является разностным многочленом некоторого многочлена Q, и

б) этот многочлен Q определен с точностью до прибавления произвольной константы.

8. Действительные числа x_1, x_2, ..., x_k удовлетворяют условию $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 0$. Обозначим через m наименьшее, а через M – наибольшее из этих чисел. Докажите, что $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 \leqslant -kmM$.