Серия 2, комбинаторная

Пусть дана некоторая перестановка натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$. Пара (не обязательно стоящих рядом) чисел i и j этой перестановки образует *инверсию*, если $i < j$ и j стоит слева от i.

Перестановка любых двух из таких чисел называется *транспозицией*.

В естественной расстановке 1 2 ... n число инверсий равно нулю; в обратной n $n-1$ $\ldots 2$ 1 – $\frac{n(n-1)}{2}$.

1. (Теорема об инверсиях). Докажите, что любая транспозиция меняет четность числа инверсий.

2. В некотором городе разрешены только тройные обмены квартир. Можно ли, производя такие обмены, в результате обменять две квартиры, оставив во всех остальных квартирах их прежних обитателей?

3. На полке стоят $n > 1$ книг, каждые две из которых имеют разную толщину и высоту. Книги расставлены в порядке возрастания высоты. Вася может поменять местами любые две стоящие рядом книги, если левая из них толще и ниже, чем правая. Докажите, что вне зависимости от порядка Васиных действий через конечное число шагов Вася будет вынужден прекратить свою деятельность, и книги будут стоять в порядке возрастания толщины.

4. Несколько шахматистов разыграли турнир в один круг, в котором не было ничьих. В турнирной таблице расставили 0 и 1 в соответствии с результатами, после чего обнаружилось, что судьи забыли, кто из шахматистов каким номером обозначен. Докажите, что число способов восстановить нумерацию нечетно.

5. В некоторой стране каждые два города соединены дорогой. На каждой дороге разрешено движение только в одном направлении. Докажите, что найдется город, выехав из которого, можно объехать всю страну, побывав во всех городах по одному разу.

6. Все натуральные числа покрашены в 2 цвета. Докажите, что можно выбрать один из цветов так, чтобы для любого натурального числа k нашлось бы бесконечно много чисел этого цвета, кратных k.

7. С натуральным числом, написанным на доске, разрешается проделать такую операцию: умножить его на выражение $(p-1)^2/p$, где p – его простой делитель, и записать результат вместо исходного числа. Докажите, что, какое бы исходное число мы ни взяли и как бы мы ни проделывали описанные операции, на доске рано или поздно появится число 1.

8. В некоторой точке прямой находится частица. За первую секунду она делится пополам и половинки расходятся в разные стороны на расстояние 1 от прежнего положения. За следующую секунду образовавшиеся частицы снова делятся пополам и половинки расходятся в противоположные стороны на расстояние 1 от прежних положений. Сталкиваясь, любые две частицы уничтожаются, так что, например, через две секунды останется только две частицы. Сколько частиц останется через 129 секунд?