Серия 5, с многочленами

1. $n > 2$ – натуральное число, p – простое.

а) Докажите, что если $p > 2n$, то C_{2n}^{n} не делится на p.

б) Докажите, что если $n < p < 2n$, то p входит в C_{2n}^{n} ровно в первой степени.

в) Докажите, что если $\frac{2n}{3} < p \leqslant n$, то C_{2n}^{n} не делится на p.

г) Докажите, что если $p \geqslant \sqrt{2n}$, то p входит в C_{2n}^{n} не более чем в первой степени.

д) Докажите, что если C_{2n}^{n} делится на p^k, то $p^k \leqslant 2n$.

е) при любом натуральном n $C_{2n}^{n} < 4^n$;

ж) при любом натуральном $n > 1$ $C_{2n}^{n} > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$.

з) Докажите, что произведение всех простых чисел p, для которых $n < p \leqslant 2n-1$, делит C_{2n-1}^{n}.

и) Докажите, что произведение всех простых чисел, не превосходящих n, меньше 4^n.

к) Докажите, что если R_n – произведение всех простых p с $n < p \leqslant 2n$, то $R_n > \frac{4^{\frac{n}{3}}}{2\sqrt{n}(2n)^{\pi(\sqrt{2n})}}$ при всех натуральных n.

л) Докажите, что $R_n > \frac{4^{\frac{n}{3}}}{2\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{\frac{n}{2}}}}$ при всех натуральных $n \geqslant 98$.

м) Выведите отсюда, что при натуральном $n > 5$ между n и $2n$ содержится по крайней мере два различных простых числа. (Сделать это можно разными способами; скучный и элементарный план – $2^k > 18(k+1)$ при натуральном $k \geqslant 8$; $2^x > 18x$ при вещественном $x \geqslant 8$; $2^x > 6x$ при вещественном $x \geqslant 6$).

н) (Постулат Бертрана, 1845; теорема Чебышева, 1850). Докажите, что при натуральном $n > 3$ между n и $2n-2$ содержится по крайней мере одно простое число.

2. а) Докажите, что не существует вещественных чисел a, b, c, A, B, C таких, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ax + by + cz)(Ax + By + Cz)$$

выполняется при всех вещественных x, y, z.

б) Докажите, что не существует комплексных чисел a, b, c, A, B, C таких, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ax + by + cz)(Ax + By + Cz)$$

выполняется при всех комплексных x, y, z.

3. Даны n положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые удовлетворяют условию $x_1x_2\ldots x_n = a$. Докажите, что $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geqslant (1+\sqrt[n]{a})^n$.

4. Положительные числа a, b, c, A, B, C удовлетворяют условиям $a + A = b + B = c + C = k$. Докажите, что $aB + bC + cA \leqslant k^2$.

5. Пусть $P(x,y)$ – многочлен двух переменных. Известно, что

а) для любых x, y и z имеем $P(x+z, y+z) = P(x,y)$;

б) для любых x и y имеем $P(x+1, y+1) = P(x,y)$.

Докажите, что существует такой многочлен одной переменной $Q(z)$, что для любых x и y выполняется равенство $P(x,y) = Q(x-y)$.

6. Существует ли квадратный трехчлен $p(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для любого натурального числа n, в десятичной записи которого участвуют одни единицы, число $p(n)$ также записывается одними единицами?

7. Многочлен четвертой степени $P(x)$ имеет четыре различных корня: $a > b > c > d$. Известно, что $P(x)$ можно представить в виде $P(x) = Q(R(x))$, где $Q(x)$ и $R(x)$ – квадратные трехчлены. Докажите, что $a - b = c - d$.

8. а) Пусть a, m, n – натуральные числа, $a > 1$. Докажите, что если $a^m + 1$ делится на $a^n + 1$, то m делится на n.

б) Пусть a, b, m, n – натуральные числа, причем a взаимно просто с b и $a > 1$. Докажите, что если $a^m + b^m$ делится на $a^n + b^n$, то m делится на n.