Серия 6: повторение нескольких технических понятий и методов.

1. Можно ли так расставить целые числа в клетках бесконечного клетчатого листа,чтобы каждое целое число встречалось хотя бы в одной клетке, а сумма любых 10 чисел, стоящих подряд по вертикали или по горизонтали делилась бы на 101?

2. Все стороны и диагонали выпуклого n-угольника покрашены в 2 цвета. Докажите, что найдется не менее $\left[\frac{n+1}{3}\right]$ одноцветных отрезков, никакие два из которых не имеют общих точек (даже вершины).

3. Все натуральные числа, кроме конечного количества, окрашены в синий цвет. Докажите, что существует бесконечное множество бесконечных арифметических прогрессий, состоящих из синих чисел, таких, что каждое синее число принадлежит ровно одной прогрессии из этого множества.

4. Существует ли бесконечная последовательность a_0, a_1, a_2, $\ldots$ целых неотрицательных чисел, в которой каждое целое неотрицательное число встречается ровно один раз, такая, что последовательность $b_n = a_n + n$ состоит из всех квадратов натуральных чисел, взятых по одному разу?

5. Докажите, что N точек на плоскости всегда можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше N и расстояние между любыми двумя из которых больше 1. (Под расстоянием между двумя кругами понимается расстояние между их ближайшими точками.)

6. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве целых чисел, не превосходящих по модулю 1000. Обозначим через m число пар (x, y), для которых $f(x) = g(y)$, через n – число пар, для которых $f(x) = f(y)$, а через k – число пар, для которых $g(x) = g(y)$. Докажите, что $2m \leqslant n + k$.

7. Клетчатая "лесенка" состоит из n столбиков, нижние клетки которых составляют строчку из n клеток, а количества клеток в столбиках (слева направо) 1, 2, $\ldots$, n. При каких n такую лесенку можно разбить на n квадратов с натуральными сторонами?

8. Обозначим через $a(n)$ число способов, которыми данное натуральное число n можно представить в виде суммы нескольких (быть может, одного) натуральных слагаемых, больших единицы, с учетом их порядка. Докажите для каждого n тождество: $a(2) + a(4) + \ldots + a(2n) = a(2n + 1)$.