Вступительные задачи, 10 класс

1. Даны натуральные n и k, причём $k \leqslant 2^{n-1}$. Докажите, что на доске $n \times n$ можно отметить несколько клеток так, чтобы количество способов расставить на отмеченных клетках n не бьющих друг друга ладей было равно k.

2. Пусть $p = 2k + 1$ – нечётное простое число, причём k не делится на 3. Выпишем все k остатков от деления чисел 1^9, 2^9, $\ldots$, k^9 при делении на p (с повторами, если они случились). Докажите, что количество выписанных чисел, не меньших $k + 1$, чётно.

3. Все натуральные делители числа 100! выписаны на доске. Петя и Вася по очереди (начинает Петя) делают ходы в следующей игре. Каждый из мальчиков своим ходом может выбрать одно ещё не покрашенное число на доске и покрасить его в красный или синий цвет. Игра заканчивается, когда все числа покрашены. Вася выигрывает, если либо произведение всех красных чисел на доске является квадратом натурального числа, либо все числа на доске синие, в противном случае выигрывает Петя. Кто выигрывает при правильной игре?

4. a, b, c – положительные числа. Найдите наименьшее значение выражения $\max\{2a, \frac{3}{b}\} + \max\{3b, \frac{3}{2c}\} + \max\{\frac{3c}{2}, \frac{2}{a}\}$.

5. Дана трапеция $ABCD$. Окружность ω_1 проходит через вершины C и D, а её центр лежит на боковой стороне AB. Аналогично, окружность ω_2 проходит через A и B, а её центр лежит на стороне CD. Пусть K и L – точки пересечения этих окружностей, а T – точка пересечения диагоналей трапеции. Докажите, что точки K, L и T лежат на одной прямой.

6. Найдите все положительные числа c такие, что существует бесконечно много пар натуральных чисел (n, m), удовлетворяющих следующим условиям: $n \geqslant m + c\sqrt{m-1} + 1$ и среди чисел n, $n + 1$, $\ldots$, $2n - m$ нет ни одного квадрата натурального числа.

7. В каждую клетку квадрата 100×100 записано слово длины n из символов 0 и 1. Назовём *расстоянием* между клетками наименьшее количество единичных ходов по вертикали и горизонтали, необходимое, чтобы добраться из первой во вторую. Оказалось, что при любом $d < 100$ любые две клетки на расстоянии d содержат слова, различающиеся ровно в d битах. При каком наименьшем n это возможно?

8. Пусть $n > 2$, $k > 1$ и $l < n$ – натуральные числа. Тренер выстроил nk детей в круг и посчитал количество способов выбрать из них ℓ детей, никакие два из которых не стоят рядом. Затем он выстроил тех же детей в k кругов по n человек в каждом, и снова посчитал количество способов выбрать из них ℓ детей, никакие два из которых не стоят рядом в одном круге. Докажите, что в обоих случаях у него получилось одно и то же количество.

9. Даны натуральное число K и некоторые его делители k_1, k_2, $\ldots$, k_n. Известно, что существуют целые числа x_1, x_2, $\ldots$, x_n, удовлетворяющие условию $k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n = 1$. Докажите, что существуют целые числа y_1, y_2, $\ldots$, y_n, удовлетворяющие условиям $k_1y_1 + k_2y_2 + \ldots + k_ny_n = 1$ и $|k_iy_i| \leqslant K$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

10. На плоскости проведены $2n$ красных и n синих прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что среди частей, на которые они разбивают плоскость, есть не менее n, ограниченных только красными прямыми.