Серия 1(b), общекомбинаторная

1. Клара разложила в ряд n карточек, на которых написаны числа от 1 до n. Пара карточек образует *инверсию*, если карточка с бо́льшим из двух номеров лежит левее карточки с меньшим номером. Карл берёт со стола карточку с числом 1, считает, сколько карточек было слева от неё, и вставляет её в ряд так, чтобы теперь столько карточек стало от неё справа. Дальше он проделывает это по очереди с карточками 2, 3, …, n. Докажите, что после действий Карла количество инверсий не изменится.

2. Даны натуральные числа $n \geqslant 3$ и $k < \frac{n(n-1)}{4}$. Рассмотрим все перестановки чисел 1, 2, …, n, в которых ровно k инверсий. Докажите, что при любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$ количество рассматриваемых перестановок, в которых i стоит левее j, больше количества остальных. (*Инверсией* в перестановке называется пара чисел $a < b$ таких, что a стоит правее b.)

3. Даны целые числа $1 \leqslant k \leqslant n$. Какое наибольшее количество k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно выбрать таким образом, чтобы для любых двух выбранных подмножеств одно из них состояло из k наименьших элементов их объединения?

4. На окружности длины $2n$ отмечены $2n$ точек, разбивающих её на дуги длины 1. Докажите, что среди любых $n+1$ дуг с длинами 1, 2, …, $n+1$ и концами в отмеченных точках найдутся две, одна из которых содержится в другой.

5. Докажите, что существует такое натуральное n, что при любой раскраске всех непустых подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в 1000 цветов найдутся два непересекающихся подмножества $A, B \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ такие, что подмножества A, B и $A \cup B$ имеют один и тот же цвет.

6. На окружности отмечены $2n$ точек так, что никакие три хорды с концами в этих точках не пересекаются в одной точке, лежащей внутри окружности. Разобьем отмеченные точки на n пар, и в каждой паре соединим точки отрезком. Число точек пересечения проведенных n отрезков назовем *характеристикой* разбиения. Найдите среднее арифметическое характеристик по всем разбиениям.

7. Дано такое семейство S подмножеств множества $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, что если $A, B \in S$, то $A \cup B \in S$, $A \cap B \in S$ и если $A \in S$, то $M \setminus A \in S$. Сколько множеств может быть в таком семействе S?

8. В двух таблицах $10^{220} \times 10^{2002}$ расставляются фишки с номерами от 1 до 10^{2222}. В первой таблице фишки расставляются по строкам слева направо (в первой сверху – от 1 до 10^{2002}, во второй – от $10^{2002}+1$ до $2 \cdot 10^{2002}$ и т.д.); во второй таблице – по столбцам сверху вниз (в первом слева - от 1 до 10^{220}, во втором – от $10^{220}+1$ до $2 \cdot 10^{220}$ и т.д.). Множество номеров фишек называется инвариантным, если множества клеток, занимаемых фишками с этими номерами в первой и во второй расстановках, совпадают. В частности, один номер инвариантен, если соответствующая фишка в обеих таблицах стоит в одной и той же клетке. Докажите, что все неинвариантные номера можно разбить на инвариантные множества, в каждом из которых по 101 номеру.