Серия 3(b): клетки

1. Аня и Боря по очереди (начинает Аня) расставляют в клетках таблицы 6×6 вещественные числа. Ставить число, которое уже стоит в какой-нибудь клетке, нельзя. После того, как вся таблица заполнена, в каждой строке закрашивают черным клетку с наибольшим числом. Аня выигрывает, если можно провести ломаную, соединяющую верхнюю сторону таблицы с нижней стороной и лежащую целиком в черных клетках. В противном случае выигрывает Боря. Кто выиграет при правильной игре?

2. При каких $n > 2$ можно покрасить n вершин правильного n^2-угольника в синий цвет и n других вершин в красный цвет так, чтобы расстояние между любыми двумя вершинами синего цвета не совпадало с расстоянием между любыми двумя вершинами красного цвета?

3. Какое наименьшее количество клеток, попарно не имеющих общих точек, можно выкинуть из бесконечной клетчатой плоскости так, чтобы оставшуюся часть нельзя было разрезать на доминошки?

4. Прямоугольную таблицу, в клетках которой стоят целые числа, назовем *n-близкой*, если в каждых двух клетках, соседних по стороне, стоят числа, отличающиеся не более, чем на n. Докажите, что каждая kn-близкая таблица является суммой k n-близких таблиц. (Сумма нескольких прямоугольных таблиц одинакового размера – это таблица, в каждой клетке которой стоит сумма чисел, стоящих в соответствующих клетках таблиц-слагаемых.)

5. Из клетчатого квадрата 101×101 вырезали центральную клетку. Дима хочет сделать связную клетчатую заслонку, которая при любом расположении в этом квадрате закрывает дырку. Каким наименьшим числом клеточек ему удастся обойтись? Клетчатая фигура называется связной, если из любой ее клетки можно пройти в любую другую, не покидая фигуры и переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку.

6. Можно ли в единичные кубики клетчатого куба $4 \times 4 \times 4$ записать 64 попарно различных числа так, чтобы сумма чисел в любых 4 кубиках, центры которых лежат на одной прямой, была одной и той же?

7. Из бесконечной шахматной доски вырезана связная клетчатая фигура. Оказалось, что чёрных клеток в ней ровно в 3 раза больше, чем белых. Докажите, что фигуру можно разрезать на одинаковые связные фигурки, состоящие из четырёх клеток. Фигура называется связной, если из любой ее клетки можно пройти в любую другую, не покидая фигуры и переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку.

8. Дан квадрат $n \times n$. Назовем множество его клеток *хорошим*, если в любом столбце и в любой строке лежит четное число (возможно, 0) клеток этого множества. Найдите минимальное натуральное число k такое, что у любого множества из k клеток найдется непустое хорошее подмножество.