Серия 4(b). Алгебра

1. Для всех троек положительных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\leqslant 3$, докажите неравенство $\frac{x^2}{y^3}+\frac{y^2}{z^3}+\frac{z^2}{x^3}\geqslant \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$.

2. Для произвольных вещественных чисел x_i $(i=1,\ldots,n)$ докажите неравенство $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_i+x_j|\geqslant \frac{n-2}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$.

3. Для действительного $1<k<2$ определим последовательность $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ следующим образом: $b_1=1$, $b_2=k$ и $b_{n+2}=\frac{b_{n+1}^2-1}{b_n}$. Обязательно ли эта последовательность ограничена?

4. Положительные числа a, b и некоторые вещественные числа A, B удовлетворяют условиям $|A-3a|\leqslant 1-a$, $|B-3b|\leqslant 1-b$. Докажите, что $\left|\frac{AB}{3}-3ab\right|\leqslant 1-ab$.

5. На доске написано n действительных положительных чисел. За один ход разрешается стереть любые два числа и заменить каждое из них их произведением. Найдите все значения n, для которых можно гарантированно получить набор одинаковых чисел на доске.

6. Дано натуральное n. Положительные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n, b_1, b_2, $\ldots$, b_n таковы, что $a_1+a_2+\ldots+a_n=2(b_1+b_2+\ldots+b_n)$. Какие значения может принимать сумма $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}+\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\ldots+\frac{b_n}{a_n}$?

7. Докажите, что при всех действительных a и b верно неравенство $2^{\frac{a^2+b^2}{2}}-1\geqslant(2^a-1)(2^b-1)$.

8. Пусть $x_1<x_2<x_3$ – корни многочлена x^3-3x-1. Докажите, что $x_3^2-x_2^2=x_3-x_1$.