Серия 5(b): честная геометрия

1. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AB = CD$) вписанная в окружность ω. Лучи BA и CD пересекаются в P. На меньшей дуге AB окружности ω выбрана точка Q так, что PQ касается ω. Точка R – произвольная точка на меньшей дуге AQ окружности ω. Прямые AR и BR пересекают PQ в точках Y и X соответственно. Оказалось, что окружность ω_1 с центром в X, касающаяся QC, и окружность ω_2 с центром в Y, касающаяся QD, не содержат точек A и B. Докажите, что можно провести касательную из A к ω_2 и из B к ω_1 так, чтобы они пересеклись на ω.

2. Пусть AA_1 и CC_1 — высоты треугольника остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Точка X движется по отрезку AC треугольника ABC так, что существует Y на прямой AC и прямые XC_1 и YC_1 симметричны относительно AC_1. Найдите геометрическое место центров окружностей (XA_1Y).

3. Средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне BC, пересекает описанную окружность Γ треугольника ABC в точках P и Q. Касательная к Γ в A пересекает BC в точке T. Докажите, что $\angle BTQ = \angle PTA$.

4. Даны две окружности, для которых есть семейство четырехугольников, описанных вокруг первой окружности и вписанных во вторую (вписанно-описанные четырехугольники). Обозначим a, b, c, d последовательные длины сторон одного из таких четырехугольников. Докажите, что величина $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{d} + \frac{d}{b}$ не зависит от выбора четырехугольника.

5. Дан равнобедренный треугольник $\triangle ABC$ ($AB = AC$). X – произвольная точка прямой BC, не совпадающая с B и C. P и Q – проекции X на AB и AC соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников $\triangle ABQ$ и $\triangle ACP$ пересекаются на прямой AX.

6. Вписанная окружность ω треугольника ABC с центром I касается стороны BC в точке D. Серединный перпендикуляр к DI пересекает описанную окружность Γ треугольника ABC в точках P, Q. Прямые p, q касаются Γ в точках P, Q, а прямые ℓ, m, пересекающиеся в точке S, параллельны p, q соответственно и касаются ω, причём I лежит не между p, ℓ и не между q, m. Прямая SA вторично пересекает Γ в точке K. Докажите, что четырехугольник $AIDK$ вписанный.

7. BE и CF – высоты разностороннего остроугольного треугольника ABC. Точка D диаметрально противоположна точке A на описанной окружности ABC. Прямые DE и DF пересекают описанную окружность ABC в точках Y и Z соответственно. Докажите, что прямые YZ, EF и BC пересекаются в одной точке.

8. Пусть M – точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со стороной AB, T – произвольная точка стороны BC, отличная от вершины. Докажите, что три окружности, вписнные в треугольники BMT, MTA, ATC, касаются одной прямой.