Серия 6(b): арифметика!

1. Найдите все пары натуральных (a,b), для которых $2ab$ делится на $a+b+1$, а a^2+b^2-1 делится на $a+b-1$.

2. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-px+1=0$, где $p>2$ — простое число. Докажите, что $x_1^p+x_2^p$ — целое число, делящееся на p^2.

3. На окружности длины 1 сидит кузнечик. Каждую секунду он делает прыжок, перемещаясь на дугу данной иррациональной длины α против часовой стрелки. Для каждого натурального k кузнечик помечает точку, в которую он попадает на k-м прыжке, числом k. Кузнечик сделал n прыжков и остановился. Оказалось, что ближайшие к нему с двух сторон отмеченные точки помечены числами a и b. Докажите, что $a+b\leqslant n$.

4. На Всероссийской олимпиаде разрешено награждать строго меньше 45% участников. В олимпиаде участвовало более 20 участников. После олимпиады Власти заявили, что результаты низкие, так как доля награждённых заметно отличается от 45%. Жюри ответило, что доля награждённых и так была максимально возможной на этой олимпиаде и даже на любой олимпиаде с меньшим числом участников. Тогда Власти приказали увеличить число участников на следующих олимпиадах с тем, чтобы доля награжденных стала хотя бы в два раза ближе к 45%. Докажите, что количество участников потребуется увеличить хотя бы вдвое.

5. Рассмотрим натуральные числа a, b и n, удовлетворяющие равенству $2^n-1=ab$. Пусть 2^d – максимальная степень двойки, которая делит число $(a+1)(b-1)$. Докажите, что число d чётно.

6. Дано натуральное n. Натуральное число k, не превосходящее n, назовём *хорошим*, если у НОД(n,k) чётное количество различных простых делителей, и *плохим* иначе. Для каждого n выясните, каких чисел больше: хороших или плохих?

7. Пусть p — простое число, дающее остаток 1 при делении на 4, а множество $A\subseteq\{0,1,2,\ldots,p-1\}$ таково, что для любых $a,b\in A$ существует целое t такое, что $a-b-t^2$ делится на p. Докажите, что $|A|<\sqrt{p}$.

8. Все числа, которые можно представить в виде суммы квадратов двух взаимно простых натуральных чисел, выписаны в порядке возрастания. Докажите, что для любого n в этой последовательности можно найти n последовательных нечётных членов.