Серия 7(b), графская

1. Дан связный граф, в котором есть хотя бы одна вершина нечетной степени. Докажите, что его ребра можно раскрасить в красный и синий цвета так, чтобы для каждой вершины разность количеств выходящих из нее красных и синих ребер не превосходила 1.

2. Вершины ориентированного графа нельзя раскрасить в $n-1$ цвет так, чтобы смежные вершины имели разные цвета. Докажите, что в нем есть простой путь, проходящий по n вершинам.

3. G – двудольный граф без изолированных вершин с долями X и Y, причем вершин в X больше, чем в Y. Докажите, что в G существует по крайней мере один простой путь, у которого оба конца лежат в X, не являющийся частью никакого более длинного простого пути.

4. Дан граф на n вершинах, степени вершин $0 < d_1 \leqslant d_2 \ldots \leqslant d_n$. Докажите, что можно выбрать не менее $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2}{d_i+1}$ вершин таких, что подграф на выбранных вершинах не будет иметь циклов.

5. Некоторые жители города знакомы друг с другом. Известно, что на всяком собрании, где присутствует на менее $2n-2$ человек, найдутся n попарно знакомых. Докажите, что из города можно выслать не более чем $n-2$ человека так, что все оставшиеся люди будут знакомы между собой.

6. В графе с n вершинами и m ребрами имеется гамильтонов цикл, но после удаления любой вершины цикл исчезает. Докажите, что $m \leqslant n^2/4$.

7. В двудольном графе $2^n - 1$ вершин, в каждой написано n различных чисел. Докажите, что можно оставить в каждой вершине одно число так, чтобы в концах каждого ребра стояли различные числа.

8. В графстве Липшир $2n$ ($n \geqslant 2$) усадеб, некоторые из которых соединены дорогами (каждые две усадьбы соединяет не более одной дороги). Докажите, что, если дорог n^2+1, то можно найти четыре усадьбы, между которыми проходит не менее пяти дорог.