Серия 8(b): нечестная геометрия.

1. На плоскости отмечены вершины выпуклого n-угольника и лежащего внутри него выпуклого m-угольника так, что никакие три из $m+n$ отмеченных точек не лежат на одной прямой. Докажите, что если натуральное k удовлетворяет неравенству $k^2-k+1 \leqslant m+n$, то существует выпуклый $(k+1)$-угольник с вершинами в отмеченных точках, внутри которого не лежит никакая другая отмеченная точка.

2. В прямоугольном куске сыра есть несколько круглых дыр. Докажите, что его можно разрезать на выпуклые многоугольники, каждый из которых целиком содержит ровно одну дырку.

3. На плоскости проведено n прямых ($n>2$), делящих плоскость на несколько областей. Некоторые из этих областей окрашены, причем никакие две окрашенные области не могут соприкасаться по границе. Докажите, что число окрашенных областей не превосходит $\frac{1}{3}(n^2+n)$.

4. На плоскости расположено $2n+1$ прямых. Докажите, что существует не более $n(n+1)(2n+1)/6$ различных остроугольных треугольников, стороны которых лежат на этих прямых.

5. На плоскости рассматривается конечное множество равных, параллельно расположенных квадратов, причем среди любых $k+1$ квадратов найдутся два пересекающихся. Докажите, что это множество можно разбить не более чем на $2k-1$ непустых подмножеств так, что в каждом подмножестве все квадраты будут иметь общую точку.

6. Длина наибольшей стороны треугольника равна 1. Докажите, что три круга радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ с центрами в вершинах покрывают весь треугольник.

7. Докажите, что из любого конечного множества точек на плоскости можно так удалить одну точку, что оставшееся множество можно разбить на две части меньшего диаметра. (Диаметр – это максимальное расстояние между точками множества.)

8. Даны два выпуклых многоугольника. Известно, что расстояние между любыми двумя вершинами первого не больше 1, расстояние между любыми двумя вершинами второго также не больше 1, а расстояние между любыми двумя вершинами разных многоугольников больше, чем $1/\sqrt{2}$. Докажите, что многоугольники не имеют общих внутренних точек.