Вступительные задачи, 11 класс

1. Пусть $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$. Докажите неравенство

$$(a+b+c+4)\left(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\right) \leqslant 15.$$

2. Пусть A_n – количество перестановок σ множества $X = \{1, \ldots, n\}$ таких, что при некотором $i \leqslant n$ верно равенство $\sigma(i) = i + 100$. Пусть B_n – количество перестановок σ множества X таких, что при некотором $i < n$ верно равенство $\sigma(i+1) = \sigma(i) + 100$. Докажите, что $A_n = B_n$.

3. Центр O окружности ω лежит на окружности γ. На окружности γ зафиксирована точка A, лежащая вне окружности ω. Переменная окружность, проходящая через A и O, пересекает ω в точках P и Q. Прямые OP и OQ вторично пересекают окружность γ в точках P' и Q'. Докажите, что все прямые $P'Q'$ касаются фиксированной окружности.

4. Биссектриса тупого угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает его сторону AD в точке P, а продолжение стороны CD в точке Q. Лучи AD и CD пересекают окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точках A_1 и C_1 соответственно. Окружности, описанные около треугольников PQA_1 и PQC_1 вторично пересекают окружность ω в точках A_2 и C_2 соответственно. Докажите, что прямые AC, A_2C_2 и касательная в точке B к окружности ω пересекаются в одной точке.

5. Дано натуральное $n \geqslant 3$. Вначале на доске написаны числа 1 и 2. Двое играют в игру, ходя по очереди. Каждым ходом игрок записывает на доску натуральное число, не превосходящее n, которого ещё нет на доске, но которое является суммой двух чисел с доски или удвоенным числом с доски. Выигрывает тот, кто напишет n. Кто выигрывает при правильной игре – начинающий или его соперник?

6. Натуральное число p назовем *абсолютно простым*, если для любого натурального k такого, что $2 \leqslant k \leqslant \sqrt{p}$, выполнено неравенство $\{\frac{p}{k}\} \geqslant 0,01$ (фигурные скобки обозначают дробную часть числа). Конечно ли множество абсолютно простых чисел?

7. Найдите все натуральные p такие, что число $4x^2 + p$ – простое при всех $x = 0, 1, \ldots, p-1$.

8. Прямоугольник $a \times b$ $(a \leqslant b)$ со сторонами, идущими по линиям сетки из единичных квадратов, разрезан на треугольники площади $\frac{1}{2}$ с вершинами в узлах. Докажите, что среди них не меньше $2a$ прямоугольных.

9. На плоскости дано множество, содержащее n точек, любые две из которых находятся на расстоянии не менее 1 друг от друга. Докажите, что в этом множестве можно выбрать подмножество, содержащее не менее $n/7$ точек, любые две из которых находятся на расстоянии не менее $\sqrt{3}$ друг от друга.

10. Дан граф на n вершинах. Докажите, что все его ребра можно разбить на не более чем $n^2/4$ множеств, каждое из которых состоит из одного ребра или является треугольником.