

Серия 1(а), короткая

1. Энциклопедия состоит из 100 томов, пронумерованных числами от 1 до 100. Тома стоят по порядку от первого до сотого. С томами разрешено проделывать операции. За одну операцию сначала выбирается натуральное число $n \leq 100$. Если число n чётно, то берутся n первых томов и переставляются в конец в том же порядке. Если же число n нечётно, то берутся n первых томов и ставятся в начало в обратном порядке. Сколько различных перестановок томов можно получить несколькими такими операциями из исходной расстановки?

2. Для каждой перестановки a_1, \dots, a_n чисел от 1 до n вычислим величину $\frac{1}{a_1(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)\dots(a_1+\dots+a_n)}$, Докажите, что сумма таких величин по всем $n!$ перестановкам равна $1/n!$.

3. На полке в беспорядке стоит 100-томное собрание сочинений Л. Н. Толстого. Разрешается взять любые два тома с номерами разной четности и поменять их местами. За какое минимальное число таких перестановок всегда можно расставить тома по порядку?

4. Докажите, что количество перестановок n элементов, разбивающихся на k циклов, равно количеству способов выписать числа от 1 до n в ряд в таком порядке, чтобы нашлось ровно k чисел, каждое из которых больше всех написанных перед ним.

5. Докажите, что число подстановок на $2n$ элементах, раскладывающихся в произведение циклов четной длины без общих элементов, является точным квадратом.