Серия 4(а), графская

1. A – одна из вершин графа, все вершины которого имеют степень 1000. Его вершины можно раскрасить в 1000 цветов правильным образом. Докажите, что эту раскраску можно произвести так, чтобы соседи вершины A были окрашены хотя бы в 500 различных цветов.

2. В графе со 100 вершинами нет треугольников, а степень каждой вершины больше 40. Докажите, что этот граф – двудольный.

3. Некоторые дети в садике дружат (дружба взаимна). Группу из 13 попарно дружащих детей назовём *компанией*. Компанию назовём *забавной*, если хотя бы один из её членов не дружит ни с кем вне компании. Известно, что каждый ребёнок содержится в компании, но при удалении любой дружбы это свойство нарушается. Докажите, что любая пара друзей содержится в забавной компании.

4. Дан граф с m ребрами. Вершины графа раскрашиваются в три цвета – красный, синий и зеленый. Затем подсчитывается количество ребер, соединяющих пары красных точек, количество ребер, соединяющих пары синих точек, и количество ребер, соединяющих пары зеленых точек. Пусть эти количества равны r, b, g соответственно. Докажите, что существует раскраска вершин, для которой $3r + 2b + g \leqslant \frac{6m}{11}$.

5. Дано натуральное n. Рассматривается граф на n вершинах, на каждом ребре которого выбрано направление (стрелка). За один ход можно выполнить операцию “обращение стрелки”: выбрать некоторое ребро и изменить на нем направление стрелки на противоположное. За какое наименьшее количество операций для любого графа и любого начального выбора направлений на ребрах можно с гарантией получить граф, в которм нет ориентированного цикла (т.е. циклического маршрута, который можно пройти по стрелкам)?

6. N точек соединены друг с другом некоторым количеством отрезков; из каждой точки выходит не более 11 отрезков. Докажите, что точки можно покрасить в 4 цвета так, чтобы отрезков с одноцветными концами было не более N.

7. Дан граф с e рёбрами и v вершинами. Докажите, что из него можно выкинуть не менее, чем а) $\frac{e-v}{2}$, б) $\frac{e-v+1}{2}$ рёбер так, чтобы степень каждой вершины уменьшилась не более, чем вдвое.

8. На вечеринку собрались несколько мальчиков и несколько девочек. После вечеринки выяснилось, что для каждой пары девочек есть ровно три мальчика, которые танцевали и с той, и с другой, а для каждой пары мальчиков есть ровно три девочки, которые танцевали и с тем, и с другим. Докажите, что на вечеринке было поровну мальчиков и девочек.