Серия 5(а): нам нужны многочлены.

1. (Задача Чебышева о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля).

Определение. Пусть $P(x)$ – многочлен. Уклонение P от нуля на отрезке Δ – это величина $E(P) = \max\limits_{x\in\Delta} |P(x)|$.

Мы примем, что среди всех унитарных многочленов степени n существует многочлен P_0, наименее уклоняющийся от нуля, то есть такой, у которого $E(P)$ минимально (доказательство этого факта будет обсуждено отдельно).

а) Докажите, что P_0 имеет $n-1$ экстремум, и все они лежат на отрезке Δ.

б) Докажите, что любые два максимума многочлена P_0 равны.

в) Приведите пример унитарного многочлена T степени n, $n+1$ раз принимающего значения $\pm E(T)$ на отрезке Δ – попеременно положительные и отрицательные (это явление называется *чебышевским альтернансом*).

г) Докажите, что этот многочлен является единственным унитарным многочленом степени n, наименее уклоняющимся от нуля на Δ.

Задача 2, разумеется, независима от задачи 1, пользоваться одной для другой не надо.

2. *Четный тригонометрический многочлен* – это функция вида $f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_n \cos nx$. Если $a_n \neq 0$, то говорят, что это многочлен степени n.

а) Докажите, что для четного тригонометрического многочлена f степени n со старшим коэффициентом a_n $\frac{1}{2n}\left(f(0) - f\left(\frac{\pi}{n}\right) + f\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \ldots - f\left(\frac{(2n-1)\pi}{n}\right)\right) = a_n$

б) Докажите, что соотношение $f(x) = P(\cos x)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между четными тригонометрическими многочленами степени n со старшим коэффициентом a_n и обычными многочленами степени n со старшим коэффициентом $2^{n-1}a_n$.

в) Докажите, что уклонение от нуля унитарного многочлена степени n на отрезке $[-1;1]$ не меньше, чем $\frac{1}{2^{n-1}}$, и что существует единственный многочлен, для которого оно равно $\frac{1}{2^{n-1}}$.

3. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Для некоторого натурального n числа $P(0), P(1), \ldots, P(2^n+1)$ делятся на 2^{2^n}. Докажите, что значения многочлена $P(x)$ во всех целых точках делятся на 2^{2^n}.

4. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ найдется многочлен $Q(x)$ такой, что $P\cdot Q = f(x^{100})$ для некоторого многочлена f.

5. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Для каждого натурального n значение $P(n)$ больше n. Рассмотрим последовательность $x_1 = 1$, $x_2 = P(x_1)$, $\ldots$, $x_n = P(x_{n-1})$, $\ldots$. Известно, что для любого натурального N найдется член последовательности, делящийся на N. Докажите, что справедливо равенство $P(x) = x + 1$.

6. (Правило Декарта) Рассмотрим многочлен $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Докажите, что количество положительных корней $P(x)$ не превосходит числа перемен знаков в последовательности a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0, из которой вычеркнуты все нули.

7. После нескольких операций дифференцирования и умножения на $x+1$, выполненных в каком-то порядке, многочлен $x^8 + x^7$ превратился в $ax + b$, $a \neq 0$. Докажите, что разность целых чисел a и b делится на 49.

8. Петя и Вася придумали десять многочленов пятой степени. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из многочленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию. Какое максимальное количество чисел мог назвать Вася?