Серия 6(a): 2D

1. AD – высота остроугольного треугольника ABC. Окружность S_1 касается отрезков AD, BD, а также описанной окружности треугольника ABC. Окружность S_2 касается отрезков AD, CD, а также описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что если $AB + AC = 2BC$, то общая внутренняя касательная к S_1 и S_2, отличная от AD, делит сторону BC пополам.

2. Точка O лежит внутри треугольника ABC. Прямые AO, BO и CO пересекают стороны BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. H – основание перпендикуляра, опущенного из точки D на EF. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из H на BE, CF, AB и AC лежат на одной окружности.

3. S – вписанная окружность треугольника ABC. Окружность S_A проходит через точки B и C и касается S в точке A_1. Аналогичным образом определяются точки B_1 и C_1. Докажите, что AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

4. $ABCDEF$ – вписанный шестиугольник, в котором $FD \parallel BC$, а прямые BC, AD, EF пересекаются в точке K. Прямые AE и BC пересекаются в точке M. Докажите, что $\frac{1}{KM} = \frac{1}{KB} + \frac{1}{KC}$.

5. О вписанном четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB > CD$ и $BC > AD$. На сторонах AB и BC отмечены точки X и Y соответственно так, что $AX = CD$ и $AD = CY$. Пусть M – середина XY. Докажите, что угол AMC прямой.

6. Касательная в точке A к описанной окружности ω треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D. Прямая ℓ пересекает отрезок AD в точке P, окружность ω в точках Q и T, стороны AB и AC соответственно в точках R и S, а продолжение стороны BC в точке U. Точки P, Q, R, S, T и U расположены на прямой ℓ в алфавитном порядке. Докажите, что если $QR = ST$, то $PQ = UT$.

7. На сторонах AB и AC нашлись такие точки P и Q соответственно, что $BC = BQ = CP$. Докажите, что касательная в точке A к описанной окружности треугольника APQ перпендикулярна прямой Эйлера треугольника ABC.

8. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрана такая точка P, что $AP = CP$, $\angle ABC = \angle APD$ и $\angle CDA = \angle CPB$. Докажите соотношение $DA \cdot AB \cdot BP = BC \cdot CD \cdot DP$.