Серия 7(а): кг

1. Квадрат со стороной 1 разрезан на 100 прямоугольников одинакового периметра p. Найдите максимальное возможное значение p.

2. На плоскости отмечены 2006 точек. Оказалось, что среди любых семи из них есть четыре, лежащие на одной окружности. Докажите, что найдутся хотя бы 1003 отмеченных точки, лежащие на одной окружности.

3. Дано натуральное число k. На координатной плоскости проведены k прямых $a_i x + b_i y = 1$, где $a_i > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, не проходящих через целые точки. Какое наибольшее количество из 10000 единичных квадратиков квадрата $0 \leqslant x \leqslant 100$, $0 \leqslant y \leqslant 100$ может разрезать объединение этих прямых?

4. Найдите все натуральные $n > 4$, для которых верно такое утверждение: в любой триангуляции выпуклого n-угольника P найдется диагональ, которая делит P на четырехугольник и $(n-2)$-угольник.

5. Бесконечная плоская Земля разбита n прямыми на страны. На Земле идёт война, в ходе которой каждая прямая движется, сохраняя своё направление, с постоянной скоростью – в результате границы стран изменяются, а некоторые страны появляются или исчезают. В некоторый момент историк составил список всех стран, существовавших когда-либо (в частности, существующих на данный момент). Какое наибольшее количество стран могло оказаться в этом списке?

6. Каждой точке X плоскости сопоставлено число $r(X) > 0$ так, что для любых точек X, Y выполнено $|r(X) - r(Y)| \leqslant |XY|/2$. Известно, что существует непустое множество точек A, обладающее следующим свойством: если даны произвольная точка Y и произвольная точка $X \in A$ такие, что $|XY| = r(X)$, то $Y \in A$. Докажите, что A совпадает со всей плоскостью.

7. Для 100 точек общего положения на плоскости (никакие 3 точки не лежат на одной прямой) требуется провести k прямых, не проходящих ни через одну из них так, чтобы в каждой части плоскости, на которые прямые делят плоскость, оказалось не более одной данной точки. Какого наименьшего k будет достаточно, чтобы это можно было сделать при любом расположении точек?

8. Дан выпуклый n-угольник, $n \geqslant 4$. Найдите количество способов провести $n-3$ диагонали так, чтобы никакие две из них не пересекались во внутренней точке n-угольника и чтобы никакие три из них не образовывали треугольник.