Серия 8(а): слышь, Лохматый, что-то не так…я что-то забыл…

1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – некоторая перестановка из чисел $1, 2, \ldots, n$; r_k – остаток от деления числа $a_1+a_2+\ldots+a_k$ на n $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Докажите, что среди чисел r_1, r_2, …, r_n по крайней мере $\sqrt{n}$ различных (если $n > 2$).

2. Пусть $k > 1$ – натуральное число и $m = 4k^2 - 5$. Докажите, что существуют натуральные a и b такие, что все члены последовательности (x_n), определённой условиями $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$, взаимно просты с m.

3. Назовём натуральное число n *фантастическим*, если оно представимо в виде

$$n = a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}$$

при некоторых положительных рациональных a и b. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, которые являются делителями каких-то фантастических чисел.

4. Докажите, что существует только конечное число таких натуральных n, что $(\frac{n}{1}+1)(\frac{n}{2}+2)\ldots(\frac{n}{n}+n)$ – целое число.

5. Даны натуральные числа a, b, c, d, e и f. Известно, что $abc + def$ и $ab + bc + ca - de - ef - fd$ кратны $S = a + b + c + d + e + f$. Докажите, что число S составное.

6. Докажите, что любое число 2^n при $n \geqslant 3$ можно представить в виде $2^n = 7x^2 + y^2$, где x и y – нечетные числа.

7. Для любых натуральных чисел $n > m$ докажите неравенство $[m, n] + [m + 1, n + 1] > \frac{2mn}{\sqrt{n-m}}$, где $[x, y]$ – наименьшее общее кратное чисел x и y.

8. Существует ли такое натуральное n, что среди двухсотых цифр после запятой в десятичных записях чисел $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+2}$, …, $\sqrt{n+999}$ сто раз встречается 0, сто раз – единица, …, сто раз – девятка?