Вступительные задачи, 8 класс

1. В классе учится n человек. Некоторые из них образуют кружки по интересам, наборы учащихся ни в каких двух кружках не совпадают. Известно, что каждый школьник ходит хотя бы в два кружка, но также есть два кружка, в которые он не ходит. Докажите, что можно выбрать пару школьников A и B такую, что найдутся кружок, в который ходят оба школьника, кружок, в который ходит только A, кружок, в который ходит только B, и кружок, в который не ходят ни A, ни B.

2. На окружности отмечено 30 точек. Любые две отмеченные точки соединены красным или синим отрезком. Можно проделывать следующую операцию: взять любой неодноцветный треугольник и перекрасить в нём два отрезка таким образом, чтобы он стал одноцветным. Верно ли, что для любой начальной раскраски отрезков можно их все сделать одноцветными с помощью указанных операций?

3. Конечно или бесконечно множество решений уравнения $x^4 + y^3 = z! + 7$ в натуральных числах?

4. По кругу стоят $n > 10$ пустых блюдечек. Первым ходом Петя кладёт конфету на одно из них. Каждым следующим ходом он может положить конфету либо на блюдечко, следующее по часовой стрелке, либо на третье по часовой стрелке от предыдущего. (Так, если он положил на первое, то следующим ходом он может положить либо на второе, либо на четвёртое.) Класть конфету в непустое блюдечко запрещено. Также запрещено делать 4 хода одного типа подряд. Какое наибольшее количество конфет может оказаться в блюдечках?

5. Натуральное число n даёт остаток 4 при делении на 8. Числа $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_m = n$ – все натуральные делители n. Докажите, что если число $k < m$ не кратно 3, то $d_{k+1} \leqslant 2d_k$.

6. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_{2n-1} \geqslant a_{2n} \geqslant 0$, $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} + a_{2n} = 1$. Докажите, что $a_1a_2 + 3a_3a_4 + 5a_5a_6 + \ldots + (2n-1)a_{2n-1}a_{2n} \leqslant \frac{1}{4}$.

7. Дано простое $p > 3$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ – перестановка чисел $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. При каких p последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ заведомо можно восстановить, если для каждых различных i и j, не превосходящих $\frac{p-1}{2}$, известен остаток от деления на p числа a_ia_j?

8. Даны два различных положительных числа a и b. Докажите, что на числовой прямой найдутся два числа на расстоянии $\frac{1}{\max\{a,b\}}$ такие, что $[ax+b] = [bx+a]$ для любого x, находящегося между этими числами.

9. В треугольнике ABC сторона AB вдвое больше стороны BC. Его медианы BN и CK пересекаются в точке M. Продолжение медианы треугольника KMN, проведенной из вершины N, пересекает отрезок BK в точке D. Докажите, что углы ADN и CBN равны.

10. Будем говорить, что точка S на стороне многоугольника P *видна из точки* E, лежащей вне P, если отрезок SE не содержит точек, лежащих на сторонах P, кроме самой точки S. При каких натуральных n можно раскрасить стороны правильного $(2n+1)$-угольника в три цвета так, чтобы каждая сторона была раскрашена ровно в один цвет, в каждый цвет была покрашена хотя бы одна сторона, и из каждой точки вне $(2n+1)$-угольника были видны точки не более двух цветов? Вершины многоугольника не раскрашиваются.