Серия 2(с): продолжаем общее развитие

1. Докажите, что любое целое положительное число можно представить в виде $3^{u_1}\cdot 2^{v_1}+3^{u_2}\cdot 2^{v_2}+\ldots+3^{u_k}\cdot 2^{v_k}$, где $u_1>u_2>\ldots>u_k\geqslant 0$ и $0\leqslant v_1<v_2<\ldots<v_k$ – целые числа.

2. Имеется n дискеток и n этикеток, раскрашенные в несколько цветов. Дубль – это дискета, к которой приклеена этикетка того же цвета. Докажите, что можно добиться того, что все дубли будут одного цвета.

3. Клетчатая "лесенка" состоит из n столбиков, нижние клетки которых составляют строчку из n клеток, а количества клеток в столбиках (слева направо) $1, 2, \ldots, n$. При каких n такую лесенку можно разбить на n квадратов с натуральными сторонами?

4. В шеренге стоят 2^n солдат, где n – положительное целое число. При каждом перестроении в начало новой шеренги встают солдаты, до этого стоявшие на нечётных местах (в том же порядке), а за ними – солдаты, до этого стоявшие на чётных местах (в том же порядке). Докажите, что по прошествии n перестроений солдаты окажутся в таком же порядке, с которого начали.

5. Докажите, что $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$.

6. На доске написаны два натуральных числа. Разрешается проделывать следующие операции: (i) увеличить оба числа на 1; (ii) если хотя бы одно из чисел – точный куб, извлечь из него кубический корень. Найдите все пары начальных чисел a, b, из которых такими операциями можно получить два равных числа.

7. Функция $f(x)$ определена при каждом натуральном x условием $f(x)=y$, где $y!\leqslant x<(y+1)!$. Докажите, что $f(a^2)+f(b^2)\leqslant 2f(ab)+1$ при всех натуральных a и b.