Серия 3(c): как чинили АЭС Фукусима?

1. Остап Бендер организовал в городе Фуксе раздачу слонов населению. На раздачу явилось 28 членов профсоюза и 37 не членов, причем Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну не членам. Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О.Бендера?

2. В лифте действуют две кнопки: одна, позволяющая подниматься на a этажей вверх, и другая, позволяющая спускаться на b этажей вниз. Мы говорим, что лифтом *можно пользоваться*, если с его помощью можно попасть с любого этажа на любой другой.

а) Докажите, что при $(a, b) > 1$ пользоваться лифтом нельзя.

б) Докажите, что при $(a, b) = 1$ существует такое N (зависящее от a и b), что в доме высотой по крайней мере в N этажей пользоваться лифтом можно.

в) Пусть $(a, b) = 1$. Найдите наименьшее N, для которого имеет место утверждение пункта б).

3. 10 белых и 20 черных фишек расставлены по окружности. Разрешается поменять местами любые две фишки, между которыми стоят еще три фишки. Две расстановки фишек (в данных 30 точках) назовем эквивалентными, если одну из них можно перевести в другую несколькими такими перестановками. Сколько существует неэквивалентных расстановок?

4. Натуральное число n обладает следующим свойством: для любых натуральных a и b число $(a+b)^n - a^n - b^n$ делится на n. Докажите, что $a^n - a$ делится на n для любого натурального a.

5. Дан выпуклый 100-угольник $A_1A_2\dots A_{100}$. Его разбили на треугольники не пересекающимися по внутренним точкам диагоналями. Докажите, что эти треугольники можно единственным образом занумеровать числами 1, 2, $\dots$, 98 таким образом, чтобы каждый треугольник с номером i содержал вершину A_i.

6. Сумма n натуральных чисел равна $2n-2$. Докажите, что существует граф с n вершинами, степени которых равны данным числам.

7. Обозначим через $a_{n,k}$ количество способов распределить k конфет среди n детей таким образом, чтобы каждому ребенку досталось не более двух конфет (возможно, ни одной). Вычислите сумму $a_{2024,1} + a_{2024,4} + a_{2024,7} + \dots + a_{2024,4048}$.

8. Члены последовательности натуральных чисел a_1, a_2, $\dots$, a_n, $\dots$, где $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \dots$, удовлетворяют условию $a_{mn} = a_m a_n$ при любых взаимно простых m и n. Докажите, что $a_{10}^2 \leqslant a_8 a_{13}$.