Серия 4(с), комбинаторно-геометрическая

1. Докажите, что любой выпуклый многоугольник, отличный от параллелограмма, можно поместить в треугольник, образованный продолжениями его сторон.

2. В квадрат 1×1 помещен выпуклый многоугольник площади, большей $1/2$. Докажите, что он содержит центр квадрата.

3. На плоскости отмечены вершины выпуклого n-угольника и несколько точек внутри этого n-угольника так, что никакие три отмеченные точки не лежат на одной прямой. n-угольник разбит на треугольники с вершинами в отмеченных точках. Оказалось, что каждая отмеченная точка, лежащая внутри n-угольника, является вершиной ровно 6 треугольников разбиения. Докажите, что хотя бы три вершины n-угольника принадлежат не более чем двум треугольникам разбиения.

4. В каждом узле прямоугольного листа клетчатой бумаги нарисована стрелка в направлении одного из соседних по вертикали или горизонтали узлов (стрелки из граничных узлов не могут торчать наружу). Докажите, что есть два узла, соседних по вертикали, горизонтали или диагонали, стрелки из которых направлены в противоположные стороны.

5. Докажите, что среди диагоналей выпуклого n-угольника можно отметить $n-2$ таким образом, что любой набор из $n-3$ не пересекающихся во внутренних точках диагоналей содержит хотя бы одну из отмеченных.

6. Дан квадрат со стороной 1. В нем расположен многоугольник периметра 120. Докажите, что у этого многоугольника хотя бы 15 углов имеют градусную меру больше $180°$.

7. На плоскости дано семейство L, состоящее из 2012 прямых, среди которых нет параллельных и пересекающихся более чем по две в одной точке. Скажем, что прямая $\ell_1 \in L$ *ограничивает* другую прямую $\ell_2 \in L$, если все точки пересечения прямой ℓ_2 с остальными прямыми из семейства L лежат по одну сторону от прямой ℓ_1. Докажите, что в семействе L найдутся две прямые ℓ и ℓ' такие, что прямая ℓ ограничивает прямую ℓ', а прямая ℓ' не ограничивает прямую ℓ.

8. Каждая точка плоскости покрашена в один из двух цветов так, что в любом параллелограмме с тремя одноцветными вершинами четвертая вершина того же цвета. Докажите, что все точки плоскости покрашены в один цвет.