Серия 5(с). Теорема об инверсиях и комбинаторика множеств.

Пусть дана некоторая перестановка натуральных чисел 1, 2, ..., n. Пара (не обязательно стоящих рядом) чисел i и j этой перестановки образует *инверсию*, если $i < j$ и j стоит слева от i.

Перестановка любых двух из таких чисел называется *транспозицией*.

В естественной расстановке $1\ 2 \ldots n$ число инверсий равно нулю; в обратной $n\ n-1 \ldots 2\ 1$ – $\frac{n(n-1)}{2}$.

1. (Теорема об инверсиях). Докажите, что любая транспозиция меняет четность числа инверсий.

2. В некотором городе разрешены только тройные обмены квартир (когда люди из квартиры А переезжают в В, из В в С и из С в А). Можно ли, производя такие обмены, в результате обменять две квартиры, оставив во всех остальных квартирах их прежних обитателей?

3. В последовательности целых чисел $\{a_n\}$ первый член равен k, а при $n \geqslant 1$ член a_{n+1} равен $a_n - 1$, если a_n четно, и $(a_n - 1)/2$, если a_n нечетно. При каком наименьшем положительном k среди первых 2024 членов этой последовательности нет ни одного нуля?

4. Вдумчивый мальчик Вася выписал в несколько тетрадок всевозможные множества из n натуральных чисел, не превосходящих $2n+1$. Оказалось, что любые два непересекающихся множества попали в разные тетрадки. Какое наименьшее количество тетрадок мог использовать Вася?

5. Конечное множество разбито на m подмножеств с одинаковым количеством элементов, и это же множество разбито на m^2 подмножеств с одинаковым числом элементов. Докажите, что можно выбрать m^2 различных элементов так, что каждое из множеств первого разбиения содержит ровно m выбранных элементов, а каждое из множеств второго разбиения содержит ровно один выбранный элемент.

6. Каждый ученик школы занимается хотя бы в одном из 30 кружков, но не более чем в двух из них. Оказалось, что в каждом кружке занимается ровно 30 человек, а для каждых двух кружков есть ученик, который посещает оба эти кружка. Какое наибольшее количество учеников может быть в этой школе?

7. Для каждого натурального n положим $a_n = n + m$, где m – наибольшее целое число, удовлетворяющее условию $2^{2^m} \leqslant n2^n$. Какие натуральные числа не являются членами последовательности (a_n)?

8. Докажите, что при любых натуральных a и d в последовательности a, $a+d$, $a+2d$, ..., $a+nd$, ... найдутся 100 подряд идущих членов, не являющихся квадратами натуральных чисел.