Серия 6(с): арифметика и буквы.

1. Пусть p_n – n-е простое число, а $\pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих n. Докажите, что каждое натуральное число представляется ровно в одном из видов $n + p_n - 1$ или $n + \pi(n)$.

2. Найдите сумму $\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^{k-1}}{2^k}\right] + \ldots$

3. Для каждой пары (x, y) вещественных чисел таких, что $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$, обозначим $M(x, y)$ наибольшее из чисел xy, $1 - x - y + xy$ и $x + y - 2xy$. Найдите наименьшее возможное значение $M(x, y)$.

4. Дано натуральное число n. Определим последовательность (a_n) условиями $a_0 = 1$, $a_{2i+1} = a_i$ и $a_{2i+2} = a_i + a_{i+1}$ при каждом целом неотрицательном i. Найдите сумму $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^n-1}$.

5. На доске написаны натуральные числа $x_1, \ldots, x_m$, среди которых могут быть одинаковые. Известно, что каждое из чисел $F_1, \ldots, F_{1000}$ может быть представлено в виде суммы нескольких чисел, написанных на доске (возможно, одного). При каком наименьшем m это возможно? ($F_1, \ldots, F_{1000}$ – числа Фибоначчи: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ при $k > 1$.)

6. У натурального числа n нет ни одного натурального делителя d, удовлетворяющего неравенству $\sqrt{n} \leqslant d \leqslant \sqrt[3]{n^2}$. Докажите, что у n есть простой делитель $p > \sqrt[3]{n^2}$.

7. На плоскости отмечены некоторые точки с целыми координатами (x, y), где $1 \leqslant x, y \leqslant 106$. Оказалось, что любые две точки (x, y) и (x', y') удовлетворяют одному из условий (i) $x > x' - 10$ и $y > y' - 10$, или (ii) $x' > x - 10$ и $y' > y - 10$. Какое наибольшее количество точек может быть отмечено?

8. Дана последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$. Докажите, что найдутся такие натуральные числа m и k, $1 \leqslant m \leqslant 2024$, что числа $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ и $a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{2024}$ отличаются не более чем на $|a_k|$ (если $m = 2024$, вторая сумма считается равной 0).