Серия 7(c): буквы и арифметика.

1. Для каждого нечётного простого p рассмотрим арифметическую прогрессию с разностью p и первым членом $\frac{p-1}{2}$. Докажите, что каждое натуральное число лежит хотя бы в одной из этих прогрессий.

2. Для любого натурального n обозначим через a_n наибольший нечётный делитель числа n. Докажите неравенство $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant \frac{n^2+2}{3}$.

3. Последовательность задана условиями $a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1} - n$, если $a_{n-1} > n$; в противном случае $a_n = a_{n-1} + n$. Найдите наименьший номер n такой, что $a_n = 2000$.

4. Докажите, что натуральное число n является составным тогда и только тогда, когда существуют такие натуральные числа a, b, x и y, что $a + b = n$ и $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

5. Докажите, что для любых натуральных a и b $\quad d(ab) \geqslant d(a) + d(b) - 1$.

6. Найдите все натуральные n такие, что для любых натуральных a и b верно, по крайней мере, одно из утверждений: a делится на n, b делится на n, $a + b$ делится на n, $a - b$ делится на n.