Вступительные задачи

1. В графе с n вершинами максимальная клика состоит из k вершин. Докажите, что количество всевозможных клик в этом графе (включая пустую) не превосходит а) $3^{\frac{n-k}{2}}2^k$, б) $3^{\frac{n+k}{3}}$. (*Клика* – это любое множество вершин графа, каждые две из которых соединены ребром.)

2. В царстве "Сменяемость и Преемственность" имеется n кандидатов в депутаты парламента. Каждый год в стране выбирают парламент, состоящий из некоторых из этих кандидатов. В каждом из ранее избиравшихся парламентов должен быть ровно один депутат, которого не было в этом. Докажите, что это не может продолжаться больше n лет.

3. Дано натуральное $k > 1$. Найдите наибольшее натуральное t, обладающее следующим свойством: если выбраны t последовательных натуральных чисел, можно раскрасить все натуральные числа в k цветов так, чтобы никакое из выбранных чисел не было суммой двух разных чисел одного цвета.

4. Последовательность (a_n) определена условиями $a_0 = 1$ и $a_n = \sum\limits_{k^2 \leqslant n} a_{n-k^2}$ для $n \geqslant 1$. Докажите, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100\,000\,000}$ есть хотя бы 5000 чётных.

5. Дано натуральное n. Обозначим $X = \{1, 2, \ldots, n\}$; пусть k – некоторое число из X. Назовём функцию $f\colon X \to X$ *подходящей*, если для каждого $x \in X$ найдётся целое $i \geqslant 0$ такое, что $f^{(i)}(x) \leqslant k$. Докажите, что количество подходящих функций равно $k \cdot n^{n-1}$. (Здесь через $f^{(i)}$ обозначена i-я итерация функции f, то есть $f^{(0)}(x) = x$ и $f^{(j+1)}(x) = f(f^{(j)}(x))$.)

6. Фокуснику дают стасованную 52-листовую колоду. Он по одной переворачивает карты, перед каждым переворачиванием называя масть. При этом он должен хотя бы по шесть раз назвать каждую масть. При каком наибольшем k он может гарантировать, что хотя бы k раз назовёт масть переворачиваемой карты?

7. У продавца имеются гири весом $1, 2, 4, \ldots, 2^k, \ldots$ и двухчашечные весы, показывающие разность весов гирь на чашках. Пусть $A(n)$ – наименьшее количество гирь, с помощью которых можно отвесить вес n (например, $A(7) = A(8-1) = 2$). Пусть $B(n)$ – количество разрядов, в которых отличаются двоичные записи чисел n и $3n$ (считаем, что в первую добавлены нули в старших разрядах так, чтобы количества разрядов совпали). Докажите, что $A(n) = B(n)$.

8. На плоскости отмечены n точек с целыми координатами и проведены все отрезки, соединяющих пары этих точек. Пусть v_{ij} $(i, j = 0, 1)$ – количество отрезков таких, что длины их горизонтальных и вертикальных проекций сравнимы соответственно с i и j по модулю 2. При каких n могло оказаться, что $v_{00} = v_{01} = v_{10} = v_{11}$?

9. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что $P(0) = 0$, и НОД всех чисел вида $P(k)$ (при целых k) равен 1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что НОД всех чисел вида $P(k+n) - P(k)$ (при целых k) равен n.

10. Пусть a и b – взаимно простые натуральные числа, бо́льшие единицы. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных N, что $a^k - b$ и $b^\ell - a$ делятся на N при некоторых натуральных k и ℓ.