Серия 1: порешайте предыдущую!

1. Пусть $f(x) \in R[x]$ – многочлен над кольцом R. Разложим многочлен $f(x+h) \in R[x,h]$ по степеням h: $f(x+h) = f(x)+hf_1(x)+h^2f_2(x)+\ldots$, или $f(x+h) \equiv f(x)+hf_1(x) \pmod{h^2}$. *Производная* многочлена $f(x)$ (обозначается $f'(x)$) – это многочлен $f_1(x)$. Докажите, что а) $(f+g)' = f'+g'$; б) $(fg)' = f'g+fg'$; в) если $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, то $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1}$; г) если α – корень многочлена f кратности k, то α – корень f' кратности не менее $k-1$.

2. Даны два нечетных натуральных числа a и b. Докажите, что существует такое натуральное k, что хотя бы одно из чисел $b^k - a^2$ и $a^k - b^2$ делится на 2^{2021}.

3. По одной стороне бесконечно длинного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живет некоторое конечное число пианистов. (В одной комнате может жить и несколько пианистов.) Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах – k-й и $(k+1)$-й – приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(k-1)$-ю и $(k+2)$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся.

4. а) (Лемма Кёнига) В каждой клетке прямоугольной таблицы стоит 0 или 1. Докажите, что наименьшее число линий (вертикалей и горизонталей), которые содержат все единицы, равно наибольшему количеству единиц, никакие две из которых не лежат на одной линии.

б) Выведите из леммы Кёнига теорему Холла.

5. Докажите, что в любом однокруговом турнире n команд можно выбрать команду A и $n-1$ матч так, что каждая команда, кроме A, либо проиграла один из выбранных матчей команде A и выиграла не более двух выбранных матчей, либо проиграла ровно один выбранный матч и не выиграла ни одного из выбранных.