Серия 2: базовые навыки, многословно

1. Дано простое число p. *Сигнатурой* многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами назовем последовательность остатков чисел $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(p^2)$ при делении на p^2. Найдите количество различных возможных сигнатур.

2. В Большом зале Санкт-Петербургской филармонии $N+1$ место. Вначале N человек, имеющие билеты с указанием места (в их числе и Саша), сели на произвольные N мест, не глядя на свои билеты. Пришедший последним $(N+1)$-й зритель хочет занять свое место, если оно занято, – сгоняет сидящего там, тот поступает так же и так далее, пока нужное согнанному место не окажется свободным. Какова вероятность того, что Саше придется пересесть? (Другими словами, какую долю среди всех возможных размещений зрителей составляют невыгодные для Саши?)

3. Пусть есть граф на $2n$ вершинах, в котором каждое ребро покрашено в синий или красный цвет. Синие рёбра образуют полное паросочетание, а красные рёбра образуют дерево, содержащее все вершины графа. Докажите, что найдётся цветочередующийся цикл (чётной длины).

4. Чемпионат по футболу с участием $2n$ команд ($n \geqslant 2$) проводится в $2n-1$ тур (в каждом туре все команды разбиваются на пары и играют друг с другом). Каждые две команды играют между собой один матч на поле одной из них (эта команда считается хозяином матча, а другая – гостем). Назовём команду *чередующейся*, если в любых двух последовательных турах она один раз была хозяином и другой – гостем. Какое наибольшее количество чередующихся команд может быть в чемпионате?

5. Малыш посчитал количество перестановок $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ чисел от 1 до n, в которых существуют ровно k таких номеров i, для которых $\pi_i > i$. Карлсон посчитал количество перестановок $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ чисел от 1 до n, в которых существуют ровно $k+1$ таких номеров i, для которых $\pi_i \geqslant i$. Докажите, что результаты их вычислений совпали.

6. В стране Дезориентация 2020 городов, каждые два из которых нужно соединить прямым авиарейсом, летающим, увы, только в одну сторону. Однако законы Дезориентации запрещают авиакомпаниям осуществлять транзитные перевозки (то есть если имеются рейсы из города A в город B и из города B в город C, то их не может выполнять одна и та же авиакомпания). Какое наименьшее количество авиакомпаний может справиться с организацией воздушного движения в таких непростых условиях?

7. Рассмотрим все последовательности натуральных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_{100})$ такие, что $1 \leqslant x_i \leqslant 2017$ для всех $i = 1, \ldots, 100$. Будем говорить, что последовательность $(y_1, y_2, \ldots, y_{100})$ *больше* последовательности $(z_1, z_2, \ldots, z_{100})$, если $y_i > z_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, 100$. Какое наибольшее количество последовательностей можно взять так, чтобы ни один набор не был больше другого?

8. Девиз великого хана – последовательность, состоящая из букв А и Б. Хан повелел своему зодчему написать на стене строку из n букв так, чтобы в максимально возможном количестве мест можно было прочитать девиз хана, образованный стоящими подряд буквами. Хану показалось, что девиз читается в недостаточном числе мест, и он велел архитектору сбить буквы и удлинить стену так, чтобы можно было написать на одну букву больше. Число способов прочитать девиз увеличилось, но хан всё ещё не был доволен: он повелел снова сбить буквы и достроить ещё кусок стены так, что стало можно написать ещё на одну букву больше. Число способов прочитать девиз стало ещё больше, и хан щедро наградил архитектора. Докажите, что в девизе великого хана все буквы одинаковы.