Серия 3: периодичность, последовательности, информация.

1. В город привезли 200 бочек кваса. Пятеро злодеев подсыпали в одну из бочек яд. Если человек выпьет квас с ядом, он внезапно умрёт в какой-то момент в течение ближайших 23 часов. Злодеи были пойманы, и городские власти хотят выяснить, какие бочки можно пускать в продажу. Для этого они могут дать выпить квас из любой бочки любому злодею в любое время. Какое наибольшее число безопасных бочек можно определить за двое суток?

2. В бесконечном десятичном разложении действительного числа a встречаются все цифры. Пусть v_n – количество различных цифровых отрезков длины n, встречающихся в этом разложении. Докажите, что если для некоторого n выполнено условие $v_n \leqslant n+8$, то число a рационально.

3. В марсианском языке три слова A, B и C таковы, что слово $AABB$ совпадает со словом CC. Докажите, что есть такое слово D, что каждое из слов A, B и C получается выписыванием слова D несколько раз подряд.

4. Существует ли непериодическая последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, ...такая, что при любом натуральном $n > 1$ последовательность a_n, a_{2n}, a_{3n}, ...– чисто периодическая?

5. В каждой клетке квадратной таблицы размером $n \times n$ клеток ($n \geqslant 3$) записано число 1 или -1. Если взять любые две строки, перемножить числа, стоящие в них друг над другом и сложить n получившихся произведений, то сумма будет равна 0. Докажите, что число n делится на 4.

6. Имеется 25 масок, каждая своего цвета. k мудрецов играют в игру: им показывают все маски, потом они договариваются между собой, после чего им надевают маски таким образом, что каждый из них видит маски на всех остальных (но не знает, на ком они надеты) и не видит свою. Никакие формы взаимодействия при этом не разрешаются. Все они одновременно называют по одному цвету, пытаясь угадать цвет своей маски. При каком наименьшем k они могут так заранее договориться, чтобы хотя бы один из них непременно угадал?

7. Билет лотереи – карточка, на которой имеется 50 пустых подряд расположенных клеток. Каждый участвующий в лотерее во все клетки записывает числа от 1 до 50 без повторений. Организаторы лотереи по таким же правилам заполняют такую же карточку–эталон. Выигравшим считается билет, у которого хотя бы в одной клетке записано такое же число, какое записано в этой же клетке эталона. Какое наименьшее количество билетов надо заполнить играющему, чтобы иметь выигрышный билет независимо от того, как заполнена карточка–эталон?

8. Можно ли расставить во всех точках плоскости с целыми координатами натуральные числа так, чтобы каждое натуральное число стояло в какой-нибудь точке, и чтобы на любой прямой, проходящей через две точки с целыми координатами, но не проходящей через начало координат, расстановка чисел была периодической?