

Серия 4: слова и процедуры.

1. На протяжении рабочего дня каждый посетитель приходил в библиотеку только один раз, и в начале каждой минуты число посетителей в библиотеке было чётным. Докажите, что посетителей можно разбить на две группы так, что в начале каждой минуты в библиотеке было поровну посетителей из каждой группы.

2. Найдите все функции $f(x, y)$ двух вещественных переменных такие, что для любых вещественных a, b, c (не обязательно различных) медиана набора чисел $f(a, b), f(b, c), f(c, a)$ совпадает с медианой набора a, b, c . (Медианой набора из трёх чисел называется то число набора, которое не больше одного из оставшихся и не меньше другого.)

3. Назовем словом любую конечную последовательность букв А и Б. Есть две операции над словами: первая – в любом месте слова вставить А и в конце слова приписать Б; вторая – в любом месте слова вставить АБ. Докажите, что слова, которые можно получить из слова АБ, используя только первую операцию, – это те слова, которые можно получить из слова АБ, используя только вторую операцию.

4. В языке некоторого племени только две буквы: А и Б. Кроме того, сочетания Б и АБББ означают одно и то же и в любом слове их можно менять друг на друга. Есть слово, состоящее из 33 букв А и 67 букв Б, записанных в каком-то порядке. Докажите, что существует единственная циклическая перестановка букв этого слова, которую можно несколькими такими заменами привести к слову Б.

5. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, каждое из которых делит число $2^{n^2+1} - 3^n$ при некотором натуральном n .

6. Назовем несоседние натуральные числа a и b близкими, если $a^2 - 1$ делится на b и $b^2 - 1$ делится на a .

а) Пусть $n > 1$. Докажите, что в любом отрезке $[n; 8n - 8]$ найдется пара близких чисел.

б) Постройте отрезок $[n; 8n - 9]$ ($n > 1$), в котором пар близких чисел нет.

7. Двое играют в такую игру. Первый загадывает два числа от 1 до 25, а второй должен их угадать. Он может назвать любые два числа от 1 до 25 и узнать у первого, сколько из названных им чисел – 0, 1 или 2 – совпадают с загаданными. За какое минимальное число вопросов он сможет наверняка определить загаданные числа?

8. Существуют ли 2020 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится нацело на квадрат их разности?