Серия 5: числа, многочлены

1. Докажите, что для любого натурального числа n число $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \cdot 2^{3k}$ не делится на 5.

2. (Критерий Люка-Лемера). Пусть $(1+\sqrt{3})^n = u_n + v_n\sqrt{3}$ с целыми u_n и v_n.

а) Определим *ранг* простого числа p как наименьший индекс ω, для которого v_w делится на p (если, конечно, такие индексы существуют). Докажите, что если ω – ранг нечётного простого p, то v_k делится на p тогда и только тогда, когда k делится на ω.

б) Докажите, что для любого простого p его ранг $\omega \leqslant p+1$.

в) Рассмотрим последовательность $\{s_k\}$: $s_1 = 4$, $s_2 = 14$, $\ldots$, $s_k = s_{k-1}^2 - 2$, $\ldots$. Докажите, что $u_{2^k} = 2^{2^{k-1}-1} s_k$.

г) Докажите, что если число Мерсенна $M_p = 2^p - 1$ простое, то s_{p-1} делится на M_p.

д) Докажите, что если s_{p-1} делится на M_p, то M_p простое.

3. На окружности длины 1 сидит кузнечик. Каждую секунду он делает прыжок, перемещаясь на дугу данной иррациональной длины α против часовой стрелки. Для каждого натурального k кузнечик помечает точку, в которую он попадает на k-м прыжке, числом k. Кузнечик сделал n прыжков и оставновился. Оказалось, что ближайшие к нему с двух сторон отмеченные точки помечены числами a и b. Докажите, что $a + b \leqslant n$.

4. Найдите все натуральные n, которые разбиваются в сумму степеней двойки с учётом порядка нечётным числом способов. (Например, у числа 4 шесть разбиений: $4 = 4 = 2+2 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$.)

5. Докажите, что для любого нечётного простого числа p количество натуральных n, для которых $n!+1$ делится на p, не превосходит $cp^{2/3}$, где c – некоторая константа, не зависящая от p.

6. Докажите *формулу Тейлора*: для многолена $P(x)$ степени n с вещественными коэффициентами $P(x+h) = P(x) + \frac{P'(x)}{1!}h + \frac{P''(x)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x)}{n!}h^n$ (здесь $P^{(k)}(x)$ – k–я производная многочлена $P(x)$).

7. Петя и Вася придумали десять многочленов пятой степени. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из многочленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию. Какое максимальное количество чисел мог назвать Вася?

8. Последовательность многочленов $F_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ задана соотношениями $F_{n+1}(x) = xF_n(x) - F_{n-1}(x)$, $F_0(x) = 2$, $F_1(x) = x$. Докажите, что при простом p все, кроме одного, коэффициенты многочлена $F_p(x)$ делятся на p.