Серия 6: несколько полезных задач напоследок.

1. Натуральные числа x, y и z таковы, что $xy = z^2 + 1$. Докажите, что существуют целые числа a, b, c и d такие, что $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$ и $z = ac + bd$.

2. Попарно взаимно простые целые числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 = z^{2n}$, причем $p = 4n - 1$ – простое число. Докажите, что одно из чисел x и y делится на p.

3. Число $(\sqrt{13} - 1)^{2021}$ представлено в виде $a + b\sqrt{13}$, где a и b – целые числа. Докажите, что a и b делятся на 2^{2020}.

4. Даны многочлены f и g. Известно, что степень многочлена f равна n, а степень многочлена g не превосходит $n - 2$, причем f имеет n различных действительных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{g(x_i)}{f'(x_i)} = 0$, где $f'(x)$ – производная $f(x)$.